

CWI Syllabi

Editors

M. Bakker
A.M.H. Gerards
J.W. Klop

Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI)

P.O. Box 94079, 1090 GB Amsterdam, The Netherlands
Telephone + 31 - 20 592 9333
Telefax + 31 - 20 592 4199
Website <http://www.cwi.nl/publications/>

CWI is the nationally funded Dutch institute for research in Mathematics and Computer Science.



Vakantiecursus 2007
Wiskunde in Beweging

24 en 25 augustus in Eindhoven
31 augustus en 1 september in Amsterdam

Centrum voor Wiskunde en Informatica
CWI SYLLABUS 57

De Vakantiecursus Wiskunde voor leraren in de exacte vakken in VWO, HAVO en HBO en andere belangstellenden is een initiatief van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. De cursus wordt sinds 1946 jaarlijks gegeven op het Centrum voor Wiskunde en Informatica en aan de Technische Universiteit Eindhoven.

Deze cursus is mede mogelijk gemaakt door een subsidie van de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek.

Omslag: Tobias Baanders

ISBN 90 6196 542 X

NUGI-code: 811

Copyright © 2007, Stichting Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam
Printed by Grafisch bedrijf Ponsen & Looijen bv, Wageningen.

Inhoud

<i>Docenten</i>	vi
Jan Aarts <i>Wiskunde in beweging</i>	1
Marcel Reinders <i>Dynamica en systeemidentificatie van biologische netwerken</i>	3
Jan van de Craats <i>Bestaat er dan toch een wortel uit -1?</i>	7
Arjen Doelman <i>De dynamica van patronen: wiskunde en woestijnen</i>	27
Robbert Fokkink, Swier Garst <i>Een Hollandsche differentiaalvergelijking</i>	47
Joost Hulshof <i>Differentiaalvergelijkingen, oscillaties en planeetbanen</i>	55
Rainer Kaenders <i>Dubbelplaneten</i>	73
Bernard Meulenbroek <i>Donder en bliksem</i>	97
Jan Wiegerinck <i>Complexe dynamica</i>	109
<i>Kleurenillustraties</i>	137

Docenten

Prof.dr. J.M. Aarts

Technische Universiteit Delft, Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Van Kinschotstraat 13, 2614 XJ Delft, tel. 015-2126448

j.m.aarts@ewi.tudelft.nl

Prof.dr. J. van de Craats

Universiteit van Amsterdam, Open Universiteit

Marinus de Jongstraat 12, 4904 PL Oosterhout, 0162-457364

jcr@science.uva.nl

Prof.dr. A. Doelman

Centrum voor Wiskunde en Informatica, Modelling, Analysis and Simulation
Kruislaan 413, 1098 SJ Amsterdam, tel. 020-5924226

A.Doelman@cwi.nl

Universiteit van Amsterdam, Korteweg-de Vries Instituut

Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam, tel. 020-5255296

A.Doelman@uva.nl

Prof.dr. J. Hulshof

Vrije Universiteit, Departement Wiskunde

De Boelelaan 1081, 1081 HV Amsterdam, tel. 020-5987682

j.hulshof@few.vu.nl

Dr. R.J. Fokkink

Technische Universiteit Delft, Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Postbus 5031, 2600 GA Delft, tel. 015-2789215

r.j.fokkink@ewi.tudelft.nl

Drs. S.H.P. Garst

Regionale Scholengemeenschap Goeree-Overflakkee

Postbus 57, 3240 AB Middelharnis, tel. 0187-482777

garst@planet.nl

Dr. R. Kaenders

ILS, Radboud Universiteit Nijmegen

Postbus 9103, 6500 HD Nijmegen, tel. 024-3611572

R.Kaenders@ils.ru.nl

Dr. B.J. Meulenbroek

Technische Universiteit Delft, Basiseenheid Mathematische Fysica

Mekelweg 4, 2628 CD Delft, tel. 015-2789069

B.J.Meulenbroek@tudelft.nl

Prof.dr.ir. M.J.T. Reinders
Technische Universiteit Delft, Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Postbus 5031, 2600 GA Delft, tel. 015-2786424
M.J.T.Reinders@ewi.tudelft.nl

Prof.dr. J.J.O.O. Wiegerinck
Universiteit van Amsterdam, Korteweg-de Vries Instituut
Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam, tel. 020-5255296
J.J.O.O.Wiegerinck@uva.nl

Contacten Centrum voor Wiskunde en Informatica

Mevrouw W. van Ojik
Centrum voor Wiskunde en Informatica, Kruislaan 413, Postbus 94079,
1090 GB Amsterdam, 020 - 592 4009, wilmy.van.Ojik@cwi.nl

Dr. M. Bakker
Centrum voor Wiskunde en Informatica, Kruislaan 413, Postbus 94079,
1090 GB Amsterdam, 020 - 592 4172, Miente.Bakker@cwi.nl

Wiskunde in beweging

Jan Aarts
Technische Universiteit Delft

De vakantiecursus 2007 is gewijd aan de wiskunde van veranderingen: dynamische systemen. Het thema van de cursus Wiskunde in beweging verwijst ook naar de veranderingen in het wiskundeonderwijs van het vwo. De cursus biedt een hele waaier van onderwerpen, die bijna allemaal raakpunten met het nieuwe programma wiskunde D van het vwo hebben.

Op het TV-scherm zie je bij het weerbericht vaak een plaatje van een vectorveld. In ieder punt \vec{x} zie je een pijltje $\vec{F}(\vec{x})$ dat de windrichting en -sterkte in dat punt aangeeft. We kunnen een momentopname bekijken; we nemen dan aan dat de grootte en richting van de pijltjes niet veranderen in de tijd. Om de beweging van luchtdeeltjes te vinden, zoeken we parameterkrommen met de eigenschap dat in ieder punt \vec{x} de snelheid in grootte en richting gelijk is aan $\vec{F}(\vec{x})$; dat zijn de oplossingen van de differentiaalvergelijking $\vec{x}' = \vec{F}(\vec{x})$. Omdat het om een momentopname gaat, is het rechterlid van deze differentiaalvergelijking onafhankelijk van de tijd. Daarom noemen we de differentiaalvergelijking *autonoom*.

De functie $t \rightarrow \vec{H}(\vec{x}, t)$ is de oplossing van de differentiaalvergelijking $\vec{x}' = \vec{F}(\vec{x})$ met

$$\vec{H}(\vec{x}, 0) = \vec{x}.$$

De functie $\vec{H}(\vec{x}, t)$ in de variabelen \vec{x} en t beschrijft dan de beweging van alle punten tegelijk. Het punt $\vec{H}(\vec{x}, s)$ is het punt waar je na s seconden uitkomt wanneer je op tijdstip 0 in het punt \vec{x} start. Als je nu vanuit het punt $\vec{H}(\vec{x}, s)$ nog eens t seconden verder gaat, kom je in $\vec{H}(\vec{H}(\vec{x}, s), t)$. Maar je komt in precies hetzelfde punt als je in \vec{x} start en $s + t$ seconden onderweg bent. Dus:

$$\vec{H}(\vec{H}(\vec{x}, s), t) = \vec{H}(\vec{x}, s + t).$$

De functie \vec{H} is een *dynamisch systeem*. De bovenstaande formules heten de *groeps eigenschappen* van het systeem. Voor vaste \vec{x} geeft $\vec{H}(\vec{x}, t)$ alle punten waar \vec{x} komt. Voor vaste t vertelt $\vec{H}(\vec{x}, t)$ voor elk punt \vec{x} waar het zal zijn op tijdstip t .

Als het vectorveld \vec{F} afhangt van de tijd, dan hebben we te maken met een *niet-autonoom* dynamisch systeem. Dat is over het algemeen een heel stuk moeilijker te begrijpen dan een autonoom dynamisch systeem.

De eenvoudigste manier om de studie van het dynamisch systeem aan te pakken is de studie van het systeem \vec{H} voor discrete waarden van t , bijvoorbeeld voor de gehele waarden van t . Schrijven we $\vec{H}(\vec{x}, 1) = \vec{h}(\vec{x})$ dan volgt uit de groepeerseigenschappen

$$\vec{H}(\vec{x}, 2) = \vec{h}(\vec{h}(\vec{x})),$$

en meer algemeen

$$\vec{H}(\vec{x}, n) = \vec{h}^n(\vec{x}).$$

Hierin is \vec{h}^n een verkorte schrijfwijze voor de afbeelding \vec{h} die n keer achter elkaar wordt toegepast.

In zijn eenvoudigste vorm gaat het in de dynamica om de studie van het gedrag van punten onder herhaalde toepassing van één afbeelding, dus de rijen $z, \vec{h}(z), \vec{h}(\vec{h}(z)), \dots$ voor verschillende getallen z . In de complexe dynamica is de afbeelding vaak 'eenvoudig', namelijk kwadratisch of exponentieel. Dat levert hele mooie plaatjes op. Prof.dr. J.J.O.O. Wiegierinck zal uitleggen wat die plaatjes ons vertellen over de functies.

Om de benodigde kennis van complexe functies op te frissen zal prof.dr. J. van de Craats een kleine cursus over complexe getallen geven.

In de lezing van prof.dr. J. Hulshof wordt de overstap gemaakt naar (gewone) differentiaalvergelijkingen. De functies sinus en cosinus worden (opnieuw) gedefinieerd als oplossingen van de lineaire slingervergelijking. Op die manier kunnen vele eigenschappen van deze functies worden (her)ontdekt. Als toepassing wordt de vergelijking van de planetenbanen afgeleid.

Over de beweging van planeten wordt nog meer uit de doeken gedaan in de voordracht Dubbelplaneten van dr. R. Kaenders. De lezing is een voorbeeld van de vervlechting van wiskunde en natuurkunde. De wetten van Newton zijn de inbreng uit de natuurkunde; de rest is wiskunde.

De vergelijking van Van der Pol, die door professor Zeeman op de Nederlandse Wiskunde Dagen van enkele jaren geleden werd aangeduid als *your national differential equation*, wordt behandeld in de lezing van dr. R.J. Fokkink en drs. S. Garst. De vergelijking beschrijft de Van der Pol oscillator en werd door zijn ontdekker aangewend om het hartritme te modelleren.

In de voordracht Dynamica van Patronen door prof.dr. A. Doelman gaat het over patronen die voorkomen in de natuur (meanderende rivieren en vegetatie) en de veranderingen daarin. De dynamica van de patronen wordt beschreven met partiële differentiaalvergelijkingen.

In de moleculaire biologie bestudeert men dynamische processen in levende cellen op het niveau van moleculen. In de voordracht van prof.dr.ir. M.J.T. Reinders zullen enkele aspecten, met name netwerkkenmerken en identificatie van netwerken, aan de orde komen.

Ook de natuurverschijnselen van donder en bliksem zijn onderwerp van wiskundige studie, zoals blijkt uit de lezing van dr. B.J. Meulenbroek over ontladingen en hun niet-lineaire dynamica.

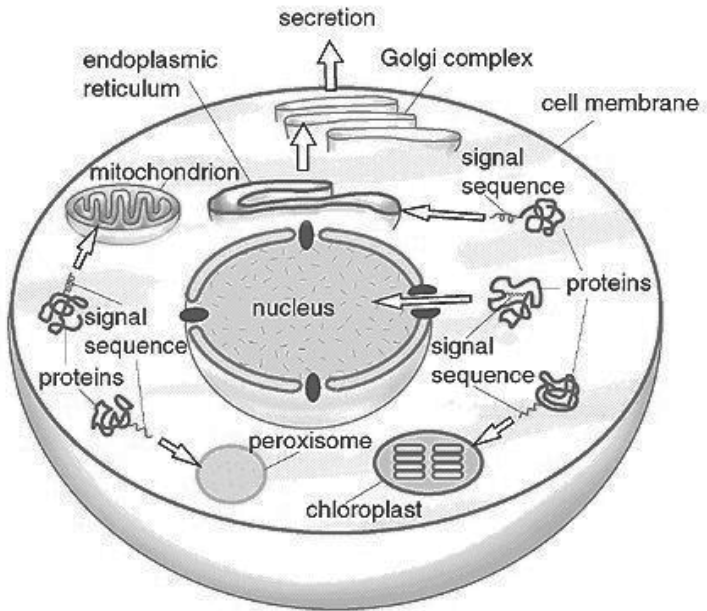
Dynamica en systeemidentificatie van biologische netwerken

Marcel Reinders
Technische Universiteit Delft

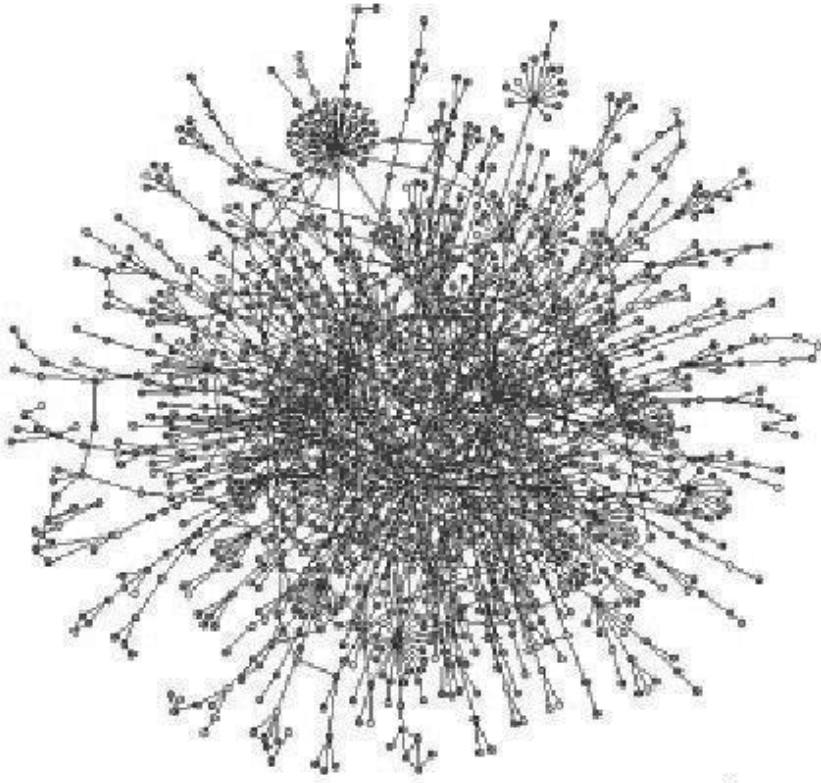
Biologische netwerken, zoals de regulatie van genen, signaal routes of metabolische routes, zijn representaties van dynamische systemen. Traditioneel worden deze netwerken als kleinschalige dynamische systemen bestudeerd. De huidige ontwikkelingen in de moleculaire biologie maken het echter mogelijk om biologische systemen als grootschalige dynamische systemen te bestuderen. In deze voordracht wordt enerzijds ingegaan op dynamische netwerkkarakteristieken en anderzijds op de identificatie van dynamische netwerken uit meetdata.

Netwerkkarakteristieken: Structurele eigenschappen van biologische netwerken kunnen worden afgeleid door het netwerk als een graaf te representeren. Voor biologische netwerken blijkt dan bijvoorbeeld dat de graad van de knopen een schaalvrije distributie heeft. Dit betekent dat er enkele componenten zijn die met veel andere componenten interactie aangaan, zogenaamde hubs [Barabasi]. Dynamische eigenschappen kunnen bestudeerd worden door linearisering van de dynamiek. Hiermee kan worden aangetoond dat eigenschappen zoals stabiliteit en robuustheid met betrekking tot kleine perturbaties sterk gecorreleerd zijn met de relatieve verrijking van kleine deelnetwerken (ofwel netwerk motieven) [Prill]. Dit geeft een indicatie dat robuuste dynamische stabiliteit een drijvend mechanisme zou kunnen zijn van de niet-random structuur van biologische netwerken.

Identificatie: De onvolledigheid van een biologisch netwerk kan worden aangevuld door het netwerk te herleiden uit meetdata [Gardner]. In het geval van de identificatie van een dynamisch netwerk zal het biologisch systeem in de tijd bemonsterd moeten worden. Bij grootschalige systemen betekent dit echter dat het aantal te schatten systeemp parameters vele male groter is dan de aanwezige informatie. Linearisering van de kinetiek reduceert het aantal te schatten parameters tot een minimum maar resulteert alsnog in een onbepaald systeem. Toch kan een systeem gekozen worden op basis van de netwerkkarakteristieken. Dit kan gerealiseerd worden door te vereisen dat het aantal paden in het netwerk spaarzaam zijn en dat het uiteindelijke netwerk ook robuust moet zijn [Someren]. Met deze technieken kan een begin gemaakt worden om de complexe biologische netwerken in kaart te brengen.



Figuur 1. Moleculaire biologie bestudeert de processen in levende cellen op het niveau van moleculen.



Figuur 2. Voorbeeld van een eiwit interactie netwerk: Gekopieerd uit: Barabasi et al. *Network biology: understanding the cell's functional organization.* *Nature Reviews Genetics* 5:101-113, 2005.

Literatuur

1. BARABASI A.L., OLTVAI Z. (2005). *Network biology: understanding the cell's functional organization.* *Nature Reviews Genetics* 5:101-113.
2. PRILL R, IGLESIAS P.A., LEVCHENKO A. (2005). *Dynamic properties of network motifs contribute to biological network organization.* *PLoS Biol* 3: e343. DOI: 10.1371/journal.pbio.0030343
3. GARDNER T.S., FAITH J.J. (2005). *Reverse-engineering transcription control networks.* *Physics of Life Reviews* 2:65-88.
4. SOMEREN E.P., VAES B.L.T., STEEGENGA W.T., SIJBERS A.M., DECHEING K.J., REINDERS M.J.T. (2006). *Least absolute regression network analysis of the murine soteoblast differentiaton network.* *Bioinformatics*, vol. 22, no. 4, pp. 477-484.

Bestaat er dan toch een wortel uit -1 ?

Complexe getallen en complexe functies voor beginners

Jan van de Craats
Universiteit van Amsterdam – Open Universiteit

Complexe getallen worden in vrijwel alle toepassingen van de wiskunde gebruikt, met name in de exacte vakken, de techniek en de economie. Ook deze vakantiecursus laat er toepassingen van zien. In het nieuwe vak Wiskunde D voor havo en vwo is *complexe getallen* een aanbevolen keuze-onderwerp. In deze voordracht geef ik een overzicht in vogelvlucht van de belangrijkste elementaire eigenschappen van complexe getallen en complexe functies. Daarbij ga ik af en toe wat verder dan wat er op school in wiskunde D behandeld kan worden, maar daarvoor is dit dan ook een vakantiecursus.

1. Hoe introduceer je de complexe getallen?

Er zijn minstens drie manieren om complexe getallen te introduceren. Ten eerste de historische benadering. Complexe getallen kwamen voor het eerst tevoorschijn toen Italiaanse wiskundigen in de zestiende eeuw formules zochten voor de oplossing van derdegraadsvergelijkingen. Bij de door Scipio del Ferro (ca. 1465-1526) en Niccolo Tartaglia (ca. 1499-1557) gevonden oplossing van het probleem, die in 1545 door Geronimo Cardano (1501-1576) in zijn *Ars Magna* gepubliceerd werd, bleek het noodzakelijk te zijn om op een formele manier te rekenen met vierkantswortels uit negatieve getallen, althans in die gevallen waarin de derdegraadsvergelijking drie verschillende reële oplossingen had. In zijn in 1572 verschenen *Algebra* bracht Rafaele Bombelli (1526–1573) enige klaarheid in de duisternis door een algemene theorie voor deze ‘imaginaire getallen’ te ontwikkelen. Het is heel goed mogelijk om met beginners ditzelfde pad te bewandelen, maar dat vereist toch flink wat doorzettingsvermogen en bovendien een goede beheersing van allerlei algebraïsche vaardigheden. Voor schoolgebruik is dit minder geschikt.

De tweede manier is de formele invoering van complexe getallen als paren reële getallen (a, b) . Op de voor de hand liggende manier definieer je de optelling (coördinaatsgewijs):

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

en op een minder voor de hand liggende manier de vermenigvuldiging:

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Zo doen de meeste leerboeken het. Snel en efficiënt. Toch valt zo'n benadering veel beginners wat rauw op de maag, juist door die formele aanpak. Zeker voor schoolgebruik is het geen gek idee om er eerst een meer intuïtieve inleiding aan vooraf te laten gaan. Hieronder laat ik daar een voorbeeld van zien.

2. Wortels uit negatieve getallen

Iedereen weet dat er geen getal x bestaat waarvoor $x^2 = -1$. Maar wat als we ons nu eens *indenken* dat er wél zo'n getal zou bestaan? Een getal, we noemen het "i" (van *imaginaire*, dat wil zeggen denkbeeldig) waarvoor dus geldt dat

$$i^2 = -1$$

Je zou dat getal dan een *wortel uit* -1 kunnen noemen: $i = \sqrt{-1}$. Ook uit andere negatieve getallen kun je dan een wortel trekken. Zo is $6i$ een wortel uit -36 want $(6i)^2 = 6i \times 6i = 36 \times i^2 = 36 \times (-1) = -36$.

Wat je in zulke gevallen eigenlijk doet, is het bepalen van een oplossing van een vergelijking van de vorm $x^2 = -a$, waarbij a een positief getal is. In de reële getallen heeft zo'n vergelijking geen oplossingen, maar met het mysterieuze getal i erbij lukt het wél. Je vindt dan $\sqrt{a}i$ als oplossing. Maar natuurlijk is $-\sqrt{a}i$ ook een oplossing: $(-\sqrt{a}i)^2 = (-1)^2(\sqrt{a})^2 i^2 = 1 \cdot a \cdot (-1) = -a$. De volledige oplossing van de vergelijking $x^2 = -a$ is blijkbaar $x = \pm\sqrt{a}i$.

Als je een getal i hebt waarvoor $i^2 = -1$, kun je ook elke vierkantsvergelijking (kwadratische vergelijking) oplossen, zelfs als de discriminant negatief is. Bijvoorbeeld $x^2 + 2x + 5 = 0$, kijk maar:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 5 &= 0 \\ (x+1)^2 + 4 &= 0 \\ (x+1)^2 &= -4 \end{aligned}$$

Dit geeft $x+1 = \pm 2i$ oftewel $x = -1 + 2i$ of $x = -1 - 2i$.

Waar het op neer komt, is dat je gewoon de bekende *abc*-formule toepast. De oplossingen van de vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ worden daarbij gegeven door

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Als de discriminant $b^2 - 4ac$ negatief is, is $4ac - b^2$ positief, en dan geldt dus $\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{(4ac - b^2)(-1)} = \sqrt{4ac - b^2}i$. In het voorbeeld hierboven was $a = 1$, $b = 2$, $c = 5$ en $b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$, en dus geldt inderdaad

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i.$$

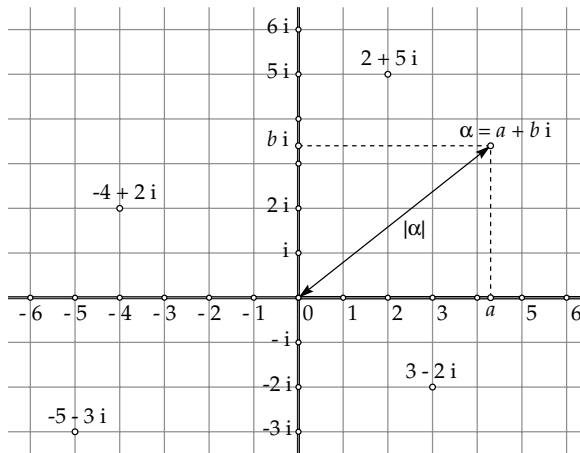
3. Het complexe vlak

Bij het oplossen van vierkantsvergelijkingen zijn we nu ook getallen van de vorm $a + bi$ tegengekomen. We noemen ze *complexe getallen*. Bijvoorbeeld $-1 + 2i$ of $3 - 5i$. Je kunt zulke getallen bij elkaar *optellen*: $(-1 + 2i) + (3 - 5i) = 2 - 3i$. Of van elkaar *afrekken*: $(-1 + 2i) - (3 - 5i) = -4 + 7i$. Of met elkaar *vermenigvuldigen*:

$$(-1 + 2i)(3 - 5i) = -3 + 5i + 6i - 10i^2 = -3 + 11i + 10 = 7 + 11i.$$

Gewoon haakjes uitwerken dus, en gebruiken dat $i^2 = -1$.

Een complex getal $a + bi$ ligt helemaal vast door de twee *reële* getallen a en b . Reële getallen kun je voorstellen als punten op een lijn, de *reële getallenlijn*. Op net zo'n manier kun je complexe getallen voorstellen als punten in het vlak, het *complexe vlak*. Daarin moet dan eerst een coördinatenstelsel gekozen zijn. Het complexe getal $a + bi$ hoort dan bij het punt met de coördinaten (a, b) , en daarmee zijn we dan uiteindelijk aangekomen bij de hierboven genoemde formele definitie van de complexe getallen van bladzijde 8 (zie ook Figuur 1).



Figuur 1. Het complexe vlak.

Voor de punten op de x -as is $b = 0$. In plaats van $a + 0i$ schrijven we dan gewoon a . En voor de punten op de y -as geldt $a = 0$. Die schrijven we dan niet als $0 + bi$ maar gewoon als bi . En voor $1i$ schrijven we natuurlijk gewoon i . Daarmee is ook het mysterieuze getal i een punt in het complexe vlak geworden: het is het punt met coördinaten $(0, 1)$.

De x -as noemen we voortaan de *reële as* en de getallen daarop de *reële getallen*. De y -as heet de *imaginaire as* en de getallen daarop heten de *imaginaire getallen*.

Complexe getallen worden vaak aangegeven met de letter z of met Griekse letters zoals α (alfa). We schrijven dan $z = x + yi$ of $\alpha = a + bi$.

Als $\alpha = a + bi$ een complex getal is, heet a het *reële deel*, notatie $a = \text{Re}(\alpha)$, en b het *imaginaire deel*, notatie $b = \text{Im}(\alpha)$. Het imaginaire deel is dus een reëel getal! Het getal $\sqrt{a^2 + b^2}$ heet de *absolute waarde* van α , notatie $|\alpha|$. De absolute

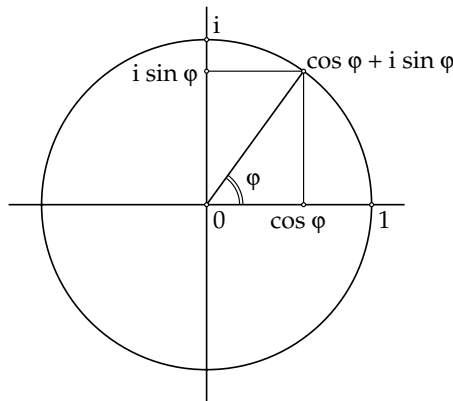
waarde van het complexe getal α is de afstand van α tot de oorsprong (stelling van Pythagoras). Als α een reëel getal is, is $|\alpha|$ dus de gewone absolute waarde van α .

4. Complexe getallen op de eenheidskring

Elk punt op de eenheidskring (de cirkel met straal 1 en de oorsprong als middelpunt) heeft in coördinaten uitgedrukt de vorm $(\cos \varphi, \sin \varphi)$. Hierbij is φ de hoek die de voerstraal (de verbindingslijn met de oorsprong) maakt met de positieve x -as (φ is de Griekse letter 'phi'). We meten φ in radialen, tegen de klok in (180° is gelijk aan π radialen). De hoek φ heet het *argument* van z , met als notatie $\varphi = \arg(z)$. Het argument is tot op gehele veelvoud van 2π na bepaald.

In het complexe vlak is een punt op de eenheidskring dus altijd van de vorm $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ (zie Figuur 2). Inderdaad geldt voor zo'n punt dat

$$|\cos \varphi + i \sin \varphi| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = \sqrt{1} = 1$$



Figuur 2. Een complex getal op de eenheidskring.

Wat gebeurt er als je twee van zulke punten $z_1 = \cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1$ en $z_2 = \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2$ met elkaar vermenigvuldigt? Dan is

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) \end{aligned}$$

Maar volgens bekende gonioregels is

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 &= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \quad \text{en} \\ \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 &= \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \end{aligned}$$

en dus is

$$z_1 z_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Dit is dus weer een getal op de eenheidscirkel met als argument de som $\varphi_1 + \varphi_2$ van de argumenten van z_1 en z_2 . Met andere woorden:

Het product $z_1 z_2$ van twee complexe getallen op de eenheidscirkel is weer een getal op de eenheidscirkel, en wel het getal dat als argument de som van de argumenten van z_1 en z_2 heeft.

Voor het quotiënt van twee complexe getallen geldt:

Het quotiënt $\frac{z_1}{z_2}$ van twee complexe getallen op de eenheidscirkel is weer een getal op de eenheidscirkel, en wel het getal dat als argument het verschil van de argumenten van z_1 en z_2 heeft.

Waarom radialen?

De reden dat we hoeken in radialen meten en niet in graden, is onder andere gelegen in de toepassingen. Daarin spelen haast altijd *functies* een rol, met name de sinus- en de cosinusfunctie. Ze worden vaak gedifferentieerd, en daarbij gelden de bekende formules $(\sin \varphi)' = \cos \varphi$ en $(\cos \varphi)' = -\sin \varphi$ alleen maar als je in radialen werkt. Ook de formules van Euler die ik hieronder zal behandelen, gelden alleen wanneer je argumenten in radialen meet. Wil je dus het onderwerp complexe getallen op een toepassingsgerichte manier behandelen, dan is het verstandig om al vanaf het begin met radialen te werken.

5. De formules van Euler

Halverwege de achttiende eeuw bewees de grote wiskundige Leonhard Euler (1707-1783) de formule

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Wij gaan hier niet op Eulers argumenten in, maar presenteren deze formule op dit moment gewoon als een definitie, of, zo je wilt, als een *verkorte notatie*. In plaats van $\cos \varphi + i \sin \varphi$ schrijven we voortaan $e^{i\varphi}$ (of $e^{\varphi i}$). Let op: het is niet de bekende, reële e-machtfunctie die hier staat, want de exponent $i\varphi$ is geen reëel getal, maar een *imaginair* getal. En natuurlijk zit er meer achter: later (op bladzijde 17) zal ik e^z zelfs voor willekeurige complexe getallen z definiëren.

In de vorige paragraaf heb ik afgeleid dat

$$(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$$

In de nieuwe notatie ziet dat er een stuk overzichtelijker uit:

$$e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Net als bij gewone e-machten geldt dus ook hier: *bij het vermenigvuldigen van imaginaire e-machten worden de exponenten bij elkaar opgeteld*. En natuurlijk geldt ook:

$$\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Bij het delen van imaginaire e-machten worden de exponenten van elkaar afgetrokken.

Als je in de eerste formule van deze paragraaf $-\varphi$ in plaats van φ invult, krijg je

$$e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = \cos \varphi - i \sin \varphi$$

Tel je de twee formules bij elkaar op, dan krijg je $e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2 \cos \varphi$ oftewel

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

Trek je ze van elkaar af, dan krijg je $e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i \sin \varphi$ oftewel

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

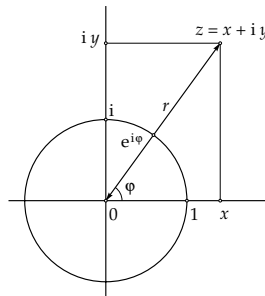
Ook deze twee beroemde formules zijn van Euler afkomstig.

6. De (r, φ) -notatie voor complexe getallen

Elk complex getal $z = x + iy$ kun je schrijven in de vorm

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

waarin $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ de absolute waarde van z , en $\varphi = \arg(z)$ het argument van z is, dat wil zeggen de hoek die de voerstraal (de verbindingslijn van z met de oorsprong) met de positieve x -as maakt (zie Figuur 3).



Figuur 3. $z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi}$.

Voor elke $z \neq 0$ is het argument (in radialen) weer tot op gehele veelvouden van 2π na bepaald. Voor $z = 0$ is er geen argument; soms neemt men echter $\arg(0) = 0$. De verkorte notatie uit de vorige paragraaf geeft

$$z = r e^{i\varphi}$$

Men noemt dit wel de (r, φ) -notatie of *polaire notatie* (omdat ze verwant is met poolcoördinaten). De (r, φ) -notatie is bijzonder handig bij het vermenigvuldigen en delen:

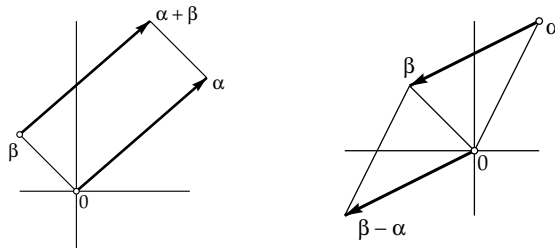
$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Bij vermenigvuldigen worden de absolute waarden met elkaar vermenigvuldigd en de argumenten bij elkaar opgeteld. Bij delen worden de absolute waarden gedeeld en de argumenten van elkaar afgetrokken.

7. Complexe getallen als vectoren

Een vector in het vlak kun je je voorstellen als een pijl die van een *beginpunt* naar een *eindpunt* loopt. Evenwijdige pijlen met dezelfde richting en dezelfde grootte stellen dezelfde vector voor. In het complexe vlak kun je bij elk complex getal α een vector maken door de pijl te tekenen die van de oorsprong naar het punt α loopt. Die vector kan dan ook worden voorgesteld door de pijl die van een willekeurig punt β naar het punt $\beta + \alpha$ loopt, want de punten $0, \alpha, \alpha + \beta, \beta$ vormen de hoekpunten van een parallellogram (zie Figuur 4). Omgekeerd hoort bij elke vector een complex getal, namelijk het getal dat je krijgt als eindpunt wanneer je die vector in de oorsprong laat beginnen.



Figuur 4. De vector α (links) en de verschilvector $\beta - \alpha$ (rechts)..

De vectorvoorstelling is handig als je het *verschil* $\beta - \alpha$ van twee complexe getallen α en β in beeld wilt brengen (zie Figuur 4, rechts):

$\beta - \alpha$ is de vector (pijl) die van α naar β loopt.

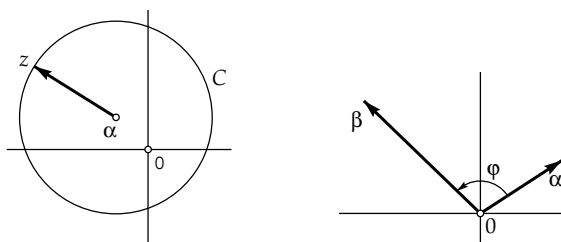
Let op: om het complexe getal $\beta - \alpha$ te vinden, moet je die pijl dus in de oorsprong laten beginnen. Voorbeeld: $\alpha = 1 + 2i$, $\beta = -1 + i$ dus $\beta - \alpha = -2 - i$.

De vectorvoorstelling is ook handig bij het werken met cirkels. Als C een cirkel is met middelpunt α en straal r dan geldt dus voor elk punt z op C dat

$$|z - \alpha| = r$$

Je kunt je $z - \alpha$ voorstellen als de pijl die van α naar z loopt, en die moet dus lengte r hebben (zie Figuur 5, links).

Soms is het ook handig om niet met de absolute waarde te werken, maar gebruik te maken van $|w|^2 = w\bar{w}$. Dan kun je de vergelijking van de cirkel C



Figuur 5. In de linkerfiguur de vectorvoorstelling van de cirkel $|z - \alpha| = r$ met middelpunt α , in de rechterfiguur het argument φ van een quotiënt β/α als gerichte hoek tussen de twee vectoren.

met middelpunt α en straal r dus schrijven als

$$(z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) = r^2$$

Ik sluit dit stukje vectormeetkunde af met nog een opmerking over quotiënten. Bij gegeven α en β is $\frac{\beta}{\alpha}$ een complex getal waarvan het argument gelijk is aan de hoek φ van de vector α naar de vector β , dat wil zeggen de hoek waarover je de pijl van 0 naar α moet draaien om hem op de pijl van 0 naar β te krijgen (Figuur 5, rechts). Er geldt immers dat $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{|\beta|}{|\alpha|} e^{i\varphi}$ waarbij

$$\varphi = \arg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \arg(\beta) - \arg(\alpha)$$

Een gevolg hiervan is de betrekking

$$\frac{\beta}{\alpha} \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} = \frac{|\beta|}{|\alpha|} e^{i\varphi} \frac{|\alpha|}{|\beta|} e^{i\varphi} = e^{2i\varphi}$$

die ik hieronder in een leuke meetkundige toepassing zal gebruiken. Bedenk hierbij dat

$$\arg\left(\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}\right) = \arg(\bar{\alpha}) - \arg(\bar{\beta}) = -\arg(\alpha) + \arg(\beta) = \varphi$$

8. Cirkels en koordenvierhoeken

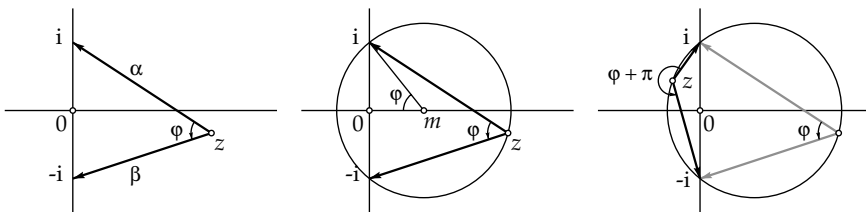
De afgelopen tien jaren is in vwo wiskunde B2 ruime aandacht besteed aan redeneren en bewijzen, onder andere aan de hand van allerlei stellingen over cirkels, omtrekshoeken, middelpuntshoeken en koordenvierhoeken. Die stof zal waarschijnlijk in het nieuwe vak wiskunde B niet meer terugkeren; voor het vervolgonderwijs is dat onderwerp, en in het bijzonder de daar gebruikte 'euclidisch-synthetische' behandeling ervan, namelijk niet erg relevant. Toch

zullen veel leraren het leuk vinden om te zien hoe al die stellingen op eenvoudige wijze met complexe getallen kunnen worden bewezen.

Ik sluit daartoe aan op de zojuist afgeleide betrekking, die ik nu in de volgende vorm schrijf

$$\frac{\beta}{\alpha} = e^{2i\varphi} \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}$$

Ik kies een punt z in het rechterhalfvlak en noem $\alpha = i - z$ en $\beta = -i - z$. De vector α is dan de pijl die van z naar i loopt, en de vector β is de pijl die van z naar $-i$ loopt. De hoek φ is de ingesloten hoek, de hoek waarover je α moet draaien om hem op β te laten vallen. Die hoek ligt altijd tussen 0 en π als z in het rechterhalfvlak ligt (zie Figuur 6, links).



Figuur 6. Het punt z in het rechterhalfvlak (linkerfiguur), de cirkel (middenfiguur) en het punt z in het linkerhalfvlak op de cirkel (rechterfiguur).

Wegens $\bar{i} = -i$ geldt dan

$$\frac{-i - z}{i - z} = e^{2i\varphi} \frac{i - \bar{z}}{-i - \bar{z}}$$

oftewel

$$(z + i)(\bar{z} + i) = e^{2i\varphi}(z - i)(\bar{z} - i)$$

en dit kan weer geschreven worden als

$$z\bar{z}(1 - e^{2i\varphi}) + i(1 + e^{2i\varphi})z + i(1 + e^{2i\varphi})\bar{z} - (1 - e^{2i\varphi}) = 0$$

Deel deze vergelijking door $2i e^{i\varphi}$ en gebruik de formules van Euler voor $\sin \varphi$ en $\cos \varphi$. Dan ontstaat

$$-(\sin \varphi)z\bar{z} + (\cos \varphi)z + (\cos \varphi)\bar{z} + \sin \varphi = 0$$

Als je vervolgens door $-\sin \varphi$ deelt en

$$m = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{1}{\tan \varphi}$$

noemt, dan ontstaat de vergelijking

$$z\bar{z} - mz - m\bar{z} - 1 = 0$$

oftewel

$$(z - m)(\bar{z} - m) = 1 + m^2$$

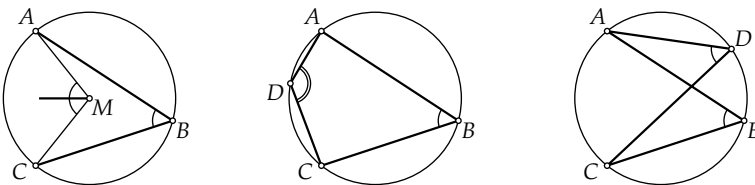
Dit is niets anders dan de vergelijking van de cirkel met middelpunt m (het reële getal m , dus als complex getal ligt het op de reële as) en straal $r = \sqrt{1 + m^2}$. We hebben dus bewezen dat z op deze cirkel ligt! Merk nog op dat je hoek φ ook terugvindt bij het middelpunt m , want $\tan \varphi = \frac{1}{m}$. En bijgevolg geldt ook $\angle(-i, m, i) = 2\varphi$ (Figuur 6, midden).

De oogst van deze algebraïsche exercitie is indrukwekkend: allereerst zie je dat *alle* punten z in het rechterhalfvlak waarvoor $\angle(i, z, -i) = \varphi$ geldt, op deze cirkel liggen. Maar je kunt de redenering ook in de omgekeerde richting lezen. Voor alle punten op de cirkel in het rechterhalfvlak geldt dus $\angle(i, z, -i) = \varphi$.

Voor punten z in het linkerhalfvlak ligt de hoek waarover je de pijl α moet draaien om hem op β te laten vallen, tussen π en 2π (Figuur 6, rechts). Als je voor die hoek $\varphi + \pi$ neemt, kom je op dezelfde cirkelvergelijking uit, want $e^{2i(\varphi+\pi)} = e^{2i\varphi}$. Omgekeerd voldoen ook alle punten z die in het linkerhalfvlak op die cirkel liggen, aan $\angle(i, z, -i) = \varphi + \pi$ want ook hier kun je de redenering in de omgekeerde richting lezen.

In feite hebben we in het bovenstaande een hele serie stellingen uit de vlakke meetkunde over cirkels bewezen. Immers, de keuze voor de punten i en $-i$ als ‘ankerpunten’ waar de hele berekening op gebaseerd is, is geen beperking van de algemeenheid. Bij elk tweetal punten P en Q in het vlak kun je een rechthoekig coördinatenstelsel kiezen waarin $P = (0, 1)$ en $Q = (0, -1)$ is, of uitgedrukt in complexe getallen, waarin $P = i$ en $Q = -i$ is.

Hier is een lijst van stellingen die we bewezen hebben. In alle gevallen hoef je slechts $A = i$ en $C = -i$ te nemen, en voor de punten B of D het variabele punt z te lezen, om de bewijzen van die stellingen uit de bovenstaande berekening te destilleren. Ga dit zelf na. De stellingen worden geïllustreerd in Figuur 7.



Figuur 7. Omtrekshoeken, middelpuntshoeken en koordenvierhoeken.

1. Als de punten A, B en C op een cirkel met middelpunt M liggen, dan geldt $\angle(A, B, C) = \frac{1}{2}\angle(A, M, C)$.
2. Als A, B, C, D in deze volgorde op een cirkel liggen (men noemt $ABCD$ dan een koordenvierhoek), dan geldt dat $\angle(A, B, C) + \angle(C, D, A) = \pi$.

3. Als de punten B en D aan weerszijden van een lijn AC liggen en als geldt dat $\angle(A, B, C) + \angle(C, D, A) = \pi$ dan liggen A, B, C en D in deze volgorde op een cirkel, met andere woorden, dan is $ABCD$ een koordenvierhoek.
4. Als de punten B en D aan dezelfde kant van een lijn AC liggen en als geldt dat $\angle(A, B, C) = \angle(A, D, C)$ dan liggen A, B, C en D op een cirkel.

9. De complexe e-macht

Op bladzijde 11 hebben we gezien dat

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Deze formule van Euler definieert de functie $w = e^z$ voor alle zuiver imaginaire waarden van z , dat wil zeggen voor alle z van de vorm $z = iy$ (ik schrijf nu y in plaats van φ). Voor reële x is de functie $w = e^x$ welbekend: het is de vertrouwde reële e-machtfunctie.

Voor een willekeurig complex getal $z = x + iy$ (met x en y reëel) definieert men de e-macht als volgt: $e^z = e^x e^{iy}$, dus

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Het is niet moeilijk om na te gaan dat de aldus gedefinieerde functie e^z de volgende eigenschappen heeft:

- $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ voor elke z_1 en z_2 .
- $|e^{x+iy}| = e^x$ en $\arg(e^{x+iy}) = y + 2k\pi$ (k geheel).
- $e^{z+2k\pi i} = e^z$ voor elk geheel getal k , met andere woorden, de e-macht is *periodiek* met periode $2\pi i$.

Men kan ook bewijzen, maar dat is lastiger, dat de e-machtfunctie differentieerbaar is en gelijk is aan zijn eigen afgeleide, dat wil zeggen dat voor elk complex getal z geldt dat

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{e^{z+\Delta z} - e^z}{\Delta z} = e^z$$

De formules van Euler op bladzijde 12 stellen ons in staat de sinusfunctie en de cosinusfunctie voor complexe getallen te definiëren met behulp van de complexe e-macht. Dat gaat als volgt:

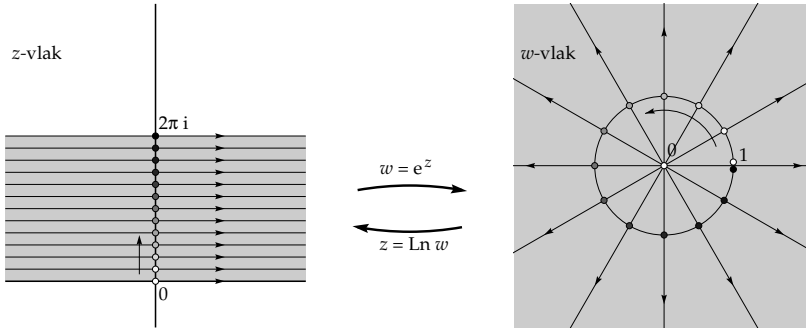
$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \end{aligned}$$

Het is niet moeilijk om te verifiëren dat deze beide functies periodiek zijn met periode 2π en dat ze verder ook voldoen aan alle bekende gonioformules, inclusief de formules

$$(\sin z)' = \cos z \quad \text{en} \quad (\cos z)' = -\sin z$$

10. De complexe natuurlijke logaritme

Bij reële functies is de natuurlijke logaritme de inverse van de e-macht. Hoe zit dat met de complexe natuurlijke logaritme en de complexe e-macht? Om dat te onderzoeken, zal ik de complexe e-machtfunctie nader onder de loupe nemen. Dat gaat het beste aan de hand van Figuur 8. Dat is een soort grafiek waarin ik voor de functie $w = e^z$ apart een z -vlak en een w -vlak heb getekend, met daarin aangegeven welke w -waarden bij welke z -waarden horen.



Figuur 8. De functies $w = e^z$ en $z = \text{Ln } w$ in beeld gebracht.

In het z -vlak is de horizontale strook $0 \leq y \leq 2\pi$ grijs gemaakt. Het stukje van de y -as dat binnen deze strook ligt, wordt op de aangegeven wijze afgebeeld op de eenheidscirkel in het w -vlak. En elke horizontale lijn in het z -vlak komt in het w -vlak terecht op een straal vanuit de oorsprong in het w -vlak. De horizontale strook $0 \leq y \leq 2\pi$ in het z -vlak wordt dus afgebeeld op het *gehele* w -vlak, met uitzondering van de oorsprong. Er is immers geen z waarvoor $e^z = 0$ geldt.

Er is nog wat bijzonders aan de hand: de bovenrand van de strook (dat wil zeggen de lijn $y = 2\pi$) komt op *dezelfde* straal terecht als de onderrand $y = 0$ want voor elke x geldt immers $e^{x+2\pi i} = e^x$. Sterker nog, voor elke z geldt $e^{z+2\pi i} = e^z$, de e-machtfunctie is immers periodiek met periode $2\pi i$. Nog weer anders gezegd: als we een *willekeurige* horizontale strook nemen met hoogte 2π , dan is het beeld ervan onder de functie $w = e^z$ het gehele w -vlak met uitzondering van het punt $w = 0$.

Wat betekent dat nu voor de inverse functie, de natuurlijke logaritme? Met andere woorden, als je een complex getal w in het w -vlak neemt, wat is dan het complexe getal z dat daarbij hoort, dat wil zeggen dat $e^z = w$? Daar is geen eenduidig antwoord op te geven. Er zijn nu bij elke gegeven $w \neq 0$ *oneindig veel* kandidaten z . Heb je één getal z waarvoor geldt dat $e^z = w$, dan geldt immers ook voor alle getallen van de vorm $z + 2k\pi i$ dat $e^{z+2k\pi i} = w$.

Het is eigenlijk net als met het argument van een complex getal: dat is op gehele veelvouden van 2π na bepaald. En zo is de natuurlijke logaritme

van een complex getal tot op gehele veelvoud van $2\pi i$ na bepaald. De natuurlijke logaritme is dus *meerwaardig*. De oorsprong is een *vertakkingspunt*. Loop je in het w -vlak één maal om de oorsprong, dan ga je in het z -vlak van de ene strook naar de volgende strook. Ook dat is in Figuur 8 goed te zien.

In de notatie zal ik onderscheid maken tussen de *complexe* natuurlijke logaritme, die dus oneindig veel waarden heeft, en de bekende *reële* natuurlijke logaritme $\ln r$ van een positief reëel getal r die maar één (reële) waarde heeft. Voor de complexe logaritme zal ik een hoofdletter gebruiken, dus $\text{Ln } w$. Als ik een kleine letter gebruik, bedoel ik de reële natuurlijke logaritme die je kent van school en van de rekenmachine.

Hoe bereken je nu $\text{Ln } w$ voor een gegeven complex getal $w \neq 0$? Dat gaat als volgt. Schrijf w in de (r, φ) -notatie, dus $w = re^{i\varphi}$ met bijvoorbeeld $0 \leq \varphi < 2\pi$. Dan is

$$\text{Ln } w = \ln r + \varphi i + 2k\pi i$$

waarbij k de gehele getallen doorloopt. Ik geef wat voorbeelden; controleer ze zelf door links en rechts de e -macht te nemen, maar ook meetkundig aan de hand van Figuur 8.

- $\text{Ln } 1 = 2k\pi i$
- $\text{Ln } (-1) = \pi i + 2k\pi i$
- $\text{Ln } e = 1 + 2k\pi i$
- $\text{Ln } i = \frac{1}{2}\pi i + 2k\pi i$
- $\text{Ln } (1 + i) = \ln \sqrt{2} + \frac{1}{4}\pi i + 2k\pi i$

11. Willekeurige complexe machten α^β

Met behulp van de complexe e -macht en de complexe natuurlijke logaritme definieert men voor willekeurige complexe getallen α en β met $\alpha \neq e$ en $\alpha \neq 0$ als volgt wat men onder α^β verstaat:

$$\alpha^\beta = e^{\beta \text{Ln } \alpha}$$

Dit naar analogie van de bekende reële rekenregel

$$a^b = e^{\ln a^b} = e^{b \ln a}$$

Maar uit α^β zullen nu in het algemeen verschillende waarden komen, want de complexe logaritme is meerwaardig. Zelfs als α en β reëel zijn kan dit gebeuren, bijvoorbeeld bij $2^{\sqrt{2}}$

$$2^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \text{Ln } 2} = e^{\sqrt{2}(\ln 2 + 2k\pi i)} = e^{\sqrt{2} \ln 2} e^{2\sqrt{2} k\pi i}$$

Dit zijn oneindig veel complexe getallen op de cirkel met de oorsprong als middelpunt en het positieve reële getal $e^{\sqrt{2} \ln 2}$ als straal. Precies één van die

getallen is de bekende reële macht, namelijk $2^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln 2} \approx 2.828427124$ (neem $k = 0$).

Niet alle machten α^β met $\alpha \neq e$ hebben oneindig veel uitkomsten. α^β heeft maar één uitkomst als β een *geheel* reëel getal n is. Immers,

$$\begin{aligned}\alpha^n &= e^{n \operatorname{Ln} \alpha} = e^{n(\operatorname{Ln} |\alpha| + \arg \alpha i + 2k\pi i)} = \\ &= e^{n(\operatorname{Ln} |\alpha| + \arg \alpha i)} e^{2kn\pi i} = e^{n(\operatorname{Ln} |\alpha| + \arg \alpha i)}\end{aligned}$$

want voor alle gehele k geldt $e^{2kn\pi i} = 1$.

Evenzo heeft α^β precies m verschillende uitkomsten als β een reële onverevendbare breuk is met m als noemer. In het bijzonder heeft elk complex getal $\alpha \neq 0$ dus precies m m -demachtswortels (neem $\beta = \frac{1}{m}$). Voor $m = 2$ krijgt elk complex getal op die manier twee vierkantswortels. Zo kun je bijvoorbeeld controleren dat $1^{\frac{1}{2}} = \pm 1$ en $(-1)^{\frac{1}{2}} = \pm i$ (doen!).

Een leuke opgave is het verder om te berekenen wat er uit i^i komt. Het antwoord verraste zelfs Euler!

12. Differentieerbaarheid

In Figuur 9 zie je hoe een rechthoekig rozetje met als centrum het punt $z_0 = -\frac{1}{2} + 4i$ door de functie $w = e^z$ wordt afgebeeld op een kromlijnig rozetje met als centrum $w_0 = e^{z_0} = e^{-\frac{1}{2} + 4i}$. De stralen in het z -rozetje in de richting van de positieve x -as en de positieve y -as zijn wat verlengd, evenals hun beelden, zodat je enig houvast hebt bij het bestuderen ervan.

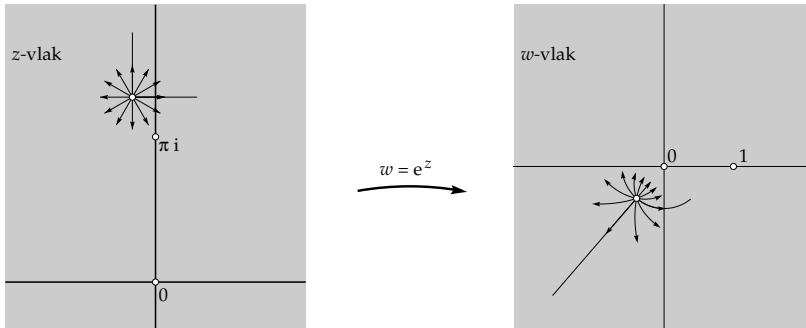
Het punt z_0 is willekeurig gekozen. Waar het om gaat, is het feit dat het beeldrozetje in het w -vlak enige gelijkenis vertoont met het z -rozetje, en dat die gelijkenis beter wordt naarmate het z -rozetje kleiner wordt gekozen. In Figuur 9 hebben de pijltjes in het z -rozetje lengte 0.7. Maak je ze vijf keer zo klein dan zal het w -rozetje ook ongeveer vijf keer zo klein worden, en de kromme lijnen ervan gaan dan steeds meer op rechte lijnen lijken (Figuur 10).

Waarom is dat zo? Dat hangt samen met de *differentieerbaarheid*. Die houdt in het algemeen voor een complexe functie $w = w(z)$ in dat

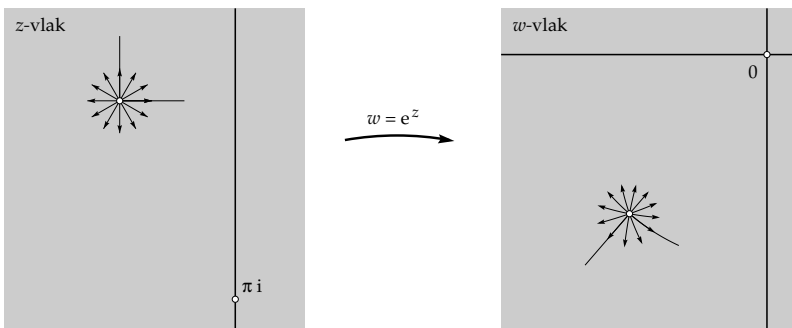
$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{w(z_0 + \Delta z) - w(z_0)}{\Delta z} = w'(z_0)$$

bestaat als eindig complex getal, oftewel, iets slordiger gezegd, dat $\Delta w \approx w'(z_0)\Delta z$ voor kleine Δz . Het z -rozetje kun je opvatten als bestaande uit kleine vectoren Δz , allemaal even lang, en elke Δw krijg je dus in eerste benadering door zo'n vectortje Δz te vermenigvuldigen met het vaste complexe getal $w'(z_0)$. Vermenigvuldigen van Δz met $w'(z_0)$ betekent dat $|\Delta z|$ vermenigvuldigd wordt met $|w'(z_0)|$ en dat er bij het argument van Δz het argument van $w'(z_0)$ wordt opgeteld.

Als $w'(z_0) \neq 0$ is, betekent de differentieerbaarheid van de functie $w = w(z)$ in het punt z_0 dus dat kleine z -rozetjes (vrijwel) *gelijkvormig* worden afgebeeld op w -rozetjes. Zo'n w -rozetje ontstaat uit het z -rozetje door het te



Figuur 9. Een rechtlijnig rozetje in het z -vlak met centrum $z_0 = -\frac{1}{2} + 4i$ wordt door de functie $w = e^z$ afgebeeld op een kromlijnig rozetje met centrum $w_0 = e^{z_0}$ in het w -vlak.



Figuur 10. Een vijf maal zo klein rozetje in het z -vlak (weer met centrum z_0) met zijn beeldrozetje (centrum $w_0 = w(z_0)$) in het w -vlak.

vergroten met een factor $|w'(z_0)|$ en te draaien over een hoek $\arg(w'(z_0))$. In de figuren 9 en 10 is $z_0 = -\frac{1}{2} + 4i$ en $w(z) = e^z$ dus $w'(z_0) = e^{-\frac{1}{2} + 4i}$ en $|w'(z_0)| = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.6065$ en $\arg(w'(z_0)) = 4$ (ongeveer 230 graden). Let erop dat het z -vlak en het w -vlak in de beide figuren niet op dezelfde schaal zijn getekend.

Differentieerbaarheid impliceert dus *gelijkvormigheid in het klein*, althans als de afgeleide niet nul is. De vakterm hiervoor is *conformiteit*. Als een complexe functie differentieerbaar is op een gebied in het z -vlak en de afgeleide is daar niet nul, dan wordt dat gebied *conform* afgebeeld in het w -vlak. Snijden twee

krommen elkaar in zo'n gebied in het z -vlak onder een gerichte hoek φ , dan zullen de beeldkrommen elkaar in het w -vlak onder *dezelfde* hoek φ snijden.

13. Een criterium voor differentieerbaarheid

Stel dat $w = w(z)$ een complexe functie is die gedefinieerd is op een gebied G in het complexe vlak (een *gebied* is een open samenhangend deel van het complexe vlak). Als voorbeeld kun je denken aan de functie $w = e^z$, waarbij G het gehele complexe vlak is.

Bij zo'n complexe functie zijn zowel de originelen z als de beelden $w = w(z)$ complexe getallen. Ze hebben dus beide een reëel deel en een imaginair deel. Stel $z = x + iy$ en $w = u + iv$ met x, y, u en v reëel. Je kunt u en v dan opvatten als reële functies van de twee reële variabelen x en y , dus $u = u(x, y)$ en $v = v(x, y)$. In het voorbeeld $w = e^z$ geldt

$$w = u + iv = e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

dus

$$u = u(x, y) = e^x \cos y \quad \text{en} \quad v = v(x, y) = e^x \sin y$$

Differentieerbaarheid van de complexe functie $w = w(z)$ in een punt $z_0 \in G$ wil zeggen dat de limiet

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{w(z_0 + \Delta z) - w(z_0)}{\Delta z} = w'(z_0)$$

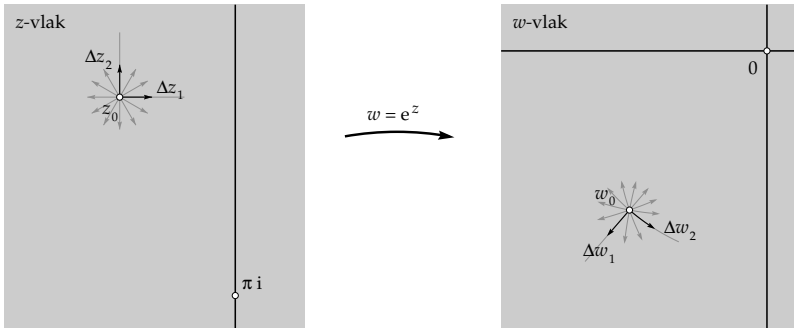
bestaat als eindig (complex) getal. In Figuur 10 hebben we daar een meetkundig beeld van gegeven in het geval dat $w'(z_0) \neq 0$. Een klein rozetje van vectoren Δz met centrum z_0 wordt (vrijwel) *gelijkvormig* afgebeeld op een rozetje van vectoren Δw , waarbij de vergrotingsfactor gelijk is aan $|w'(z_0)|$ en de draaiingshoek gelijk is aan $\arg(w'(z_0))$. Er geldt immers $\Delta w \approx w'(z_0)\Delta z$.

Wat betekent dat nu in termen van de functies $u = u(x, y)$ en $v = v(x, y)$? Het is heel gemakkelijk om een *noodzakelijke voorwaarde* voor differentieerbaarheid in z_0 af te leiden.

Stelling 1: *Als $w = w(z)$ differentieerbaar is in $z_0 = x_0 + iy_0$ dan gelden voor de partiële afgeleiden van de functies $u = u(x, y)$ en $v = v(x, y)$ (met $w = u + iv$) in het punt (x_0, y_0) de zogenaamde Cauchy-Riemannvergelijkingen (genoemd naar A.L. Cauchy (1789-1857) en B. Riemann (1826-1866))*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{en} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Een intuïtieve afleiding wordt geïllustreerd in Figuur 11. Neem voor Δz eerst een klein horizontaal naar rechts gericht pijltje Δz_1 . Noem het bijbehorende pijltje in het w -vlak Δw_1 . Neem vervolgens voor Δz een even lang, maar nu verticaal omhoog gericht pijltje Δz_2 . Noem het bijbehorende pijltje in het w -vlak Δw_2 . Dan geldt wegens de conformiteit dat Δw_2 uit Δw_1 ontstaat door draaien over een hoek van $\frac{\pi}{2}$, dat wil zeggen dat $\Delta w_2 \approx i\Delta w_1$. Draaien



Figuur 11. Bij de afleiding van de Cauchy-Riemannvergelijkingen.

over $\frac{\pi}{2}$ tegen de klok in correspondeert immers met vermenigvuldigen met i . Als $\Delta w_1 = \Delta u_1 + i\Delta v_1$ en $\Delta w_2 = \Delta u_2 + i\Delta v_2 \approx i(\Delta u_1 + i\Delta v_1) = -\Delta v_1 + i\Delta u_1$, geldt dus

$$\Delta u_2 \approx -\Delta v_1 \quad \text{en} \quad \Delta u_1 \approx \Delta v_2$$

De Cauchy-Riemannvergelijkingen zijn plausibel als je denkt aan de eerste-ordebenaderingen voor deze differenties. Neem $\Delta z_1 = h$ en $\Delta z_2 = ih$ voor een klein positief reëel getal h . Dan is

$$\Delta u_1 = u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0) \approx \frac{\partial}{\partial x} u(x_0, y_0) h$$

$$\Delta u_2 = u(x_0, y_0 + h) - u(x_0, y_0) \approx \frac{\partial}{\partial y} u(x_0, y_0) h$$

$$\Delta v_1 = v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0) \approx \frac{\partial}{\partial x} v(x_0, y_0) h$$

$$\Delta v_2 = v(x_0, y_0 + h) - v(x_0, y_0) \approx \frac{\partial}{\partial y} v(x_0, y_0) h$$

Het is eenvoudig om deze ideeën uit te werken tot een formeel bewijs. Omdat aangenomen is dat de limiet $w'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ bestaat als eindig complex getal, onafhankelijk van de manier waarop Δz naar nul gaat, kunnen we in het bijzonder die limiet nemen door Δz zuiver reëel te nemen: zeg $\Delta z = h$.

Dan is

$$\begin{aligned}
 w'(z_0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w(z_0 + h) - w(z_0)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(u(x_0 + h, y_0) + i v(x_0 + h, y_0)) - (u(x_0, y_0) + i v(x_0, y_0))}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} u(x_0, y_0) + i \frac{\partial}{\partial x} v(x_0, y_0)
 \end{aligned}$$

Maar je kunt Δz ook langs de verticale as naar nul laten gaan, dus $\Delta z = i h$. Dan krijg je, als je bedenkt dat delen door i hetzelfde is als vermenigvuldigen met $-i$ (want $i^2 = -1$):

$$\begin{aligned}
 w'(z_0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w(z_0 + i h) - w(z_0)}{i h} \\
 &= -i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(u(x_0, y_0 + h) + i v(x_0, y_0 + h)) - (u(x_0, y_0) + i v(x_0, y_0))}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + h) - v(x_0, y_0)}{h} - i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + h) - u(x_0, y_0)}{h} \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} v(x_0, y_0) - i \frac{\partial}{\partial y} u(x_0, y_0)
 \end{aligned}$$

Gelijkstellen van de reële delen en de imaginaire delen in de beide gevonden uitdrukkingen voor $w'(z_0)$ resulteert in de Cauchy-Riemannvergelijkingen.

Als voorbeeld nemen we weer $w = e^z$, dus $u = e^x \cos y$ en $v = e^x \sin y$. Aan de Cauchy-Riemannvergelijkingen is voldaan want $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y$ en $\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$. De beide gevonden uitdrukkingen voor $w'(z_0)$ zijn in dit geval (ik schrijf voor het gemak z in plaats van z_0)

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z$$

en

$$(e^z)' = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z$$

hetgeen opnieuw ondersteunt dat de e -machtfunctie gelijk is aan zijn eigen afgeleide.

Nogmaals differentieerbaarheid

In de vorige sectie hebben we de Cauchy-Riemannvergelijkingen behandeld. Als een complexe functie die gedefinieerd is op een gebied G , differentieerbaar is in een punt $z_0 \in G$, dan gelden daar de Cauchy-Riemannvergelijkingen. Maar dit is slechts een *noodzakelijke* voorwaarde; voldoende is ze niet. Echter, onder tamelijk milde extra voorwaarden garanderen ze de differentieerbaarheid wél. Zo geldt bijvoorbeeld

Stelling 2: Als de functie $w = w(z)$ met $w = u + iv$ op een gebied G gedefinieerd is en als de (reële) functies $u = u(x, y)$ en $v = v(x, y)$ op G aan de Cauchy-Riemannvergelijkingen voldoen, en als bovendien geldt dat de partiële afgeleiden van u en v naar x en y continu zijn op G , dan is w in elk punt van G differentieerbaar.

Een bewijs van deze stelling valt buiten het bestek van deze cursus. Gewapend met deze stelling kan men echter bewijzen dat de functie e^z inderdaad differentieerbaar is op het hele complexe vlak, en dat hetzelfde geldt voor de functies $\sin z$ en $\cos z$. Polynomen zijn differentieerbaar en rationale functies (quotiënten van polynomen) zijn differentieerbaar op elk gebied dat geen nulpunten van de noemer bevat. Elke tak van de complexe natuurlijke logaritme $\text{Ln } z$ is differentieerbaar op elk gebied G dat de oorsprong niet bevat. Voor elke tak geldt dat $(\text{Ln } z)' = \frac{1}{z}$. Ook wortelfuncties en andere niet-gehele machten zijn differentieerbaar op elk gebied dat de oorsprong niet bevat. De algemene formule $(z^\beta)' = \beta z^{\beta-1}$ blijft geldig.

Maar niet alle functies zijn differentieerbaar: de eis dat ze moeten voldoen aan de Cauchy-Riemannvergelijkingen is een zware eis. Ook meetkundig is dat duidelijk: de conformiteit (gelijkvormige rozetjes) is een geduchte voorwaarde. Zo is het bijvoorbeeld direct meetkundig duidelijk dat de absolute-waardefunctie $w(z) = |z|$ niet differentieerbaar is, evenmin als de conjugatiefunctie $w(z) = \bar{z}$. Je kunt ook gemakkelijk verifiëren dat deze beide functies niet aan de Cauchy-Riemannvergelijkingen voldoen.

Wanneer een functie $w = w(z)$ differentieerbaar is op een gebied G , zal zo'n functie dus allerlei bijzondere eigenschappen hebben. Sommige daarvan zijn zeer verrassend. Ze maken dat de theorie van de *complex* differentieerbare functies totaal anders is dan die van de bekende reële differentieerbare functies. Hier volgen twee van die eigenschappen.

Stelling 3: Stel dat $w = w(z)$ een complexe functie is die gedefinieerd is op een gebied G . Als $w(z)$ differentieerbaar is op G , dan geldt

1. $w(z)$ is op G oneindig vaak differentieerbaar.
2. $w(z)$ is analytisch op G , dat wil zeggen: bij elk punt $z_0 \in G$ is er een getal $R > 0$ zo, dat $w(z)$ in de cirkel $|z - z_0| < R$ ontwikkeld kan worden in een convergente machtreeks $w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$

Vooraf de eerste eigenschap is verrassend, en totaal anders dan in het reële geval: éénmaal differentieerbaar betekent oneindig vaak differentieerbaar! Ook de tweede eigenschap is verrassend: in het reële geval zijn er voorbeelden van differentieerbare functies die geen machtreeksontwikkeling hebben. Juist omdat complexe differentieerbaarheid zo'n zware eis is, hebben de functies die eraan voldoen (en dat zijn er heel wat!) tal van indrukwekkende eigenschappen die ze nuttig maken voor de meest uiteenlopende toepassingen. De theorie waarin dit bestudeerd wordt, is de *complexe functietheorie*. In deze bijdrage aan de vakantiecurus heb ik de deur naar dit gebied op een kiertje gezet.

Zie mijn homepage <http://www.science.uva.nl/~craats> voor een uitgebreide beginnerscursus *complexe getallen* met veel oefenopgaven.

De dynamica van patronen: wiskunde en woestijnen

Arjen Doelman
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

1. Inleiding

Pattern formation, of *patroonvorming* is een deelgebied van de wiskunde dat sterke banden heeft met andere wetenschappen, zoals onder andere de natuurkunde en de aard- en levenswetenschappen. Een patroon is in zo'n toegepaste context bijvoorbeeld de ligging van een rivier, of de verspreiding van de begroeiing in een woestijnachtig gebied (zie Figuur 1). De vraag die onderzoekers in dit vakgebied zich stellen is: "Hoe en waarom ontwikkelen deze patronen zich in de tijd?" Ofwel: "Wat is de dynamica van deze patronen?". Bij de rivier gaat het dan om het begrijpen van het meanderingsproces, bij de begroeiing in de woestijn bijvoorbeeld om het al of niet optreden van (volledige) verwoestijning.

Deze vragen worden vertaald in wiskunde, omdat dit soort natuurlijke processen *gemodelleerd* kunnen worden met wiskundige *differentiaalvergelijkingen*: een differentiaalvergelijking geeft namelijk een relatie tussen de verandering van een grootte in de tijd – de afgeleide – en die grootte zelf. Omdat een patroon per definitie afhangt van een ruimtelijke variabele, hangt deze grootte in het vakgebied *pattern formation* af van de ruimte en de tijd, de bijbehorende differentiaalvergelijking heet daarom een *partiële differentiaalvergelijking*.

In dit verhaal zal aan de hand van een expliciete, en tegelijkertijd zeer relevante, toepassing een poging worden gedaan enig inzicht te geven in een aantal aspecten van het vakgebied *pattern formation*.

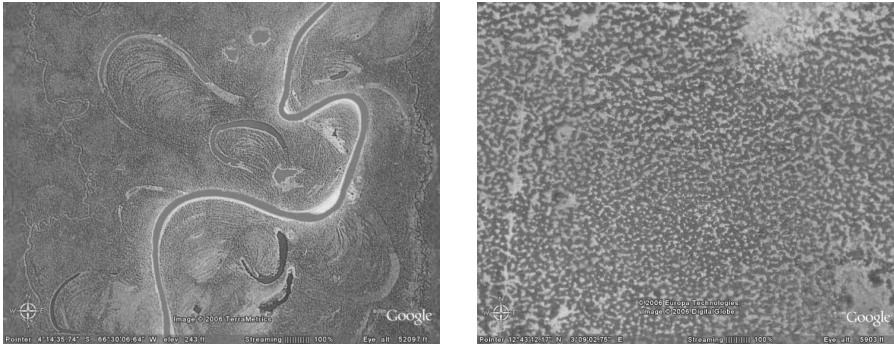
De toepassing wordt gevormd door de vegetatiepatronen in Figuur 1b. Het begrijpen van het ontstaan en verdwijnen van deze patronen is van essentieel belang voor het begrijpen van het verwoestijningsproces. Deze patronen komen namelijk vooral voor op het grensgebied tussen een woestijn en 'gezond' begroeid terrein. De transitie van een labyrint-achtig patroon als in Figuur 1b naar een woestijn is echter niet geleidelijk, maar zeer plotseling. De begroeiing neemt in eerste instantie langzaam af, bijvoorbeeld als functie van een afnemende regenval of toenemende begrazing, maar vanaf een zekere kritische waarde is de overgang catastrofaal: het labyrint verdort en het gebied verandert opeens in een woestijn. Het proces is ook onomkeerbaar, als de regenval weer toeneemt of de begrazing afneemt tot een niveau waarin voor de verwoestijning vegetatiepatronen konden bestaan, dan keert de begroeiing niet zomaar uit zichzelf terug. Het begrijpen van het hoe en

het waarom van deze catastrofe is van groot belang voor ecologen en aardwetenschappers die zich met deze problematiek bezighouden, zeker in deze tijd waarin de regenval op vele plaatsen op aarde af lijkt te nemen en de begrazing door de bevolkingsdruk zeker niet afneemt. Het ontstaan en verdwijnen van de labyrint-achtige vegetatiepatronen kan beschreven worden met een model in termen van partiële differentiaalvergelijkingen. Het eenvoudigste model, een *reactie-diffusiesysteem* in twee componenten, is opgesteld door Christopher Klausmeier [5].

Het opstellen van zo'n model is een van de belangrijkste aspecten van het onderzoek. Het speelt zich af in het overgangsgebied tussen de aardwetenschappen en de wiskunde. In sectie 2 zal worden uitgelegd hoe Klausmeier tot zijn model kwam, en hoe dat model in elkaar steekt. De volgende stap is het transformeren, of schalen, van het model, zodat het in een vorm komt die beter geschikt is voor wiskundige analyse – deze stap wordt genomen in sectie 3. Het Klausmeier model uit sectie 2 blijkt hieruit in essentie hetzelfde te zijn als het zogenaamde Gray-Scott model [3], dat een stuk ouder is en al uitgebreid bestudeerd is in de literatuur. Dit model heeft, vooral door de inspirerende (computer)simulaties van John Pearson [9, 6], aan de basis gestaan van een stroomversnelling in de wiskundige analyse van reactie-diffusie systemen en is sinds de jaren 90 uitgegroeid tot een van de meest bestudeerde modellen in het vakgebied *pattern formation*. Hieruit blijkt meteen de kracht van het wiskundig modelleren: vragen die oorspronkelijk gesteld werden in de context van het ontstaan en verdwijnen van vegetatiepatronen kunnen (gedeeltelijk) beantwoord worden met wiskunde die ontwikkeld is in het kader van een model dat een zeker soort chemische reacties, de zogenaamde auto-katalytische reacties, beschrijft.

Om een schets te geven van de wiskundige analyse van reactie-diffusie systemen is het noodzakelijk een extra (wiskundige) vereenvoudiging te introduceren: beide modellen zijn nog te ingewikkeld voor een eerste inleiding in deze materie. Deze vereenvoudiging wordt geïntroduceerd in sectie 4. Aan de hand van dit model kan worden ingegaan op de twee aspecten die de basis vormen van de analyse van patroonvorming: “Welke soort (eenvoudige) patronen kunnen worden beschreven met het model?” en “Kunnen deze patronen worden waargenomen (in de woestijn, de chemische reactie of de numerieke simulatie)?”. In meer wiskundige termen: hoe zit het met de existentie (sectie 5) en stabiliteit (secties 6, 7) van (in dit geval) stationaire evenwichtspatronen?

Met deze kennis kunnen we in sectie 8 terugkeren naar het oorspronkelijke Klausmeier/Gray-Scott model en schetsen hoe het met deze twee facetten – existentie en stabiliteit – zit voor het ‘echte’ systeem. Aan de hand hiervan kunnen we ook kort ingaan op de volgende stappen in de analyse van de dynamica van patronen: existentie en stabiliteit vormen samen namelijk niets meer dan het allereerste begin van het onderzoek. In de daaropvolgende sectie, sectie 9, keren we dan terug naar de woestijn en de verwoestijning en gaan kort in op de vragen als: “Wat kan de wiskunde de aardwetenschappen aan inzicht bieden?”, “Inspireren vragen uit de aardwetenschappen wellicht ook



Figuur 1. Twee voorbeelden van patronen die met Google Earth gevonden kunnen worden. Links een meanderende rivier die zich in het Braziliaans regenwoud bevindt, rechts een 'labyrint-achtig' vegetatiepatroon aan de rand van een woestijn in Niger (de meer donkere gebieden zijn begroeid, de lichtere niet). Beide patronen zijn dynamisch, ze veranderen, of evolueren, op een tijdschaal van jaren. Zie pagina 138 voor kleurenillustratie.

nieuw wiskundig onderzoek?" en op meer algemene aspecten van het onderzoek aan de dynamica van patronen.

Opmerking. Ook de dynamica van meanderende rivieren kan beschreven en geanalyseerd worden met wiskundige modellen, zie bijvoorbeeld [10].

2. De afleiding van het Klausmeier model

De twee onbekende grootheden in het model voor de dynamica van vegetatiepatronen dat Christopher Klausmeier opstelde [5] zijn $G(X, Y, T)$, de lokale concentratie van (grond)water per oppervlakte-eenheid, en $P(X, Y, T)$, de lokale concentratie van planten, of beter: biomassa, per oppervlakte-eenheid. Beide grootheden hangen af van de positie in het grondgebied, die bepaald wordt door de coördinaten (X, Y) en veranderen in de tijd T . Het model beschrijft de *verandering* in de tijd van $G(X, Y, T)$ en $P(X, Y, T)$ als functie van de grootheden $G(X, Y, T)$ en $P(X, Y, T)$ zelf.

De verandering van G en P in de tijd wordt uitgedrukt in termen van de *partiële afgeleiden* van G en P naar T ,

$$\frac{\partial G}{\partial T}(X, Y, T) \text{ en } \frac{\partial P}{\partial T}(X, Y, T).$$

De partiële afgeleide naar T is niets anders dan een 'gewone' afgeleide naar T waarin X en Y vast worden gehouden, ofwel

$$\frac{\partial G}{\partial T}(X, Y, T) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(X, Y, T + h) - G(X, Y, T)}{h}.$$

Merk op dat $\frac{\partial G}{\partial T}$ en $\frac{\partial P}{\partial T}$ volgens deze definitie inderdaad de (instantane) verandering van G en P in de tijd op een vaste positie (X, Y) meten. De vraag is nu: "Waardoor worden deze veranderingen bepaald?". Klausmeier zag hierbij de volgende processen een rol spelen:

- $G(X, Y, T)$ neemt toe door *regen*, neemt af door *verdamping* en door *opname door planten*, en *verspreidt* zich door/over de grond;
- $P(X, Y, T)$ neemt toe door *groei*, neemt af door *sterfte* en ook planten *verspreiden* zich over het terrein.

Ofwel, in de vorm van een stelsel vergelijkingen voor G en P :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial G}{\partial T} = \text{regen} - \text{verdamping} - \text{opname door planten} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + \text{ruimtelijke verspreiding} \\ \frac{\partial P}{\partial T} = \quad \quad \quad - \text{sterfte} + \text{groei} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + \text{ruimtelijke verspreiding} \end{array} \right. \quad (1)$$

Deze 7 processen moeten nu nog uitgedrukt worden in termen van $G(X, Y, T)$ en $P(X, Y, T)$:

- *regen*: Klausmeier representeert de regenval door een constante, de parameter n . Dus in zijn model regent het permanent (maar zachtjes). Dat is natuurlijk een zeer grove versimpeling. Aan de andere kant, planten verspreiden zich op een tijdschaal van jaren, het is wellicht niet zo heel erg gek om de regenval op die tijdschaal te modelleren als een constante ...
- *verdamping*: Hoe natter de grond, hoe meer water er zal verdampen: de simpelste beschrijving van de verdampingsterm is lG , waarin ook l weer een parameter is.
- *sterfte*: Dezelfde (versimpelde) redenering als bij verdamping: sterfte wordt beschreven door mP . Deze beschrijving is overigens standaard in de populatiedynamica.
- *groei*: Ook hier is de redenering in eerste instantie weer: hoe meer planten, hoe meer groei. Dus groei \sim een groeifactor $\times P$. Deze groeifactor zal natuurlijk van de hoeveelheid (grond)water afhangen. Iets subtieler is de volgende observatie: de aanwezigheid van begroeiing verbetert de water-infiltratie, of anders: maakt de aanwezige hoeveelheid G beter beschikbaar voor P en heeft dus ook een positieve invloed op de plantengroei. Dus de groeifactor zal een stijgende functie zijn van G en P . Klausmeier koos daarvoor de eenvoudigst mogelijke uitdrukking: rGP , waarbij r wederom een parameter is. Alles bij elkaar wordt de plantengroei dus gemodelleerd door de *niet-lineaire* uitdrukking rGP^2 .
- *opname door planten*: Planten nemen water op om te groeien en om te verdampen. De verdamping is al opgenomen in het model, dus het gaat hier alleen nog maar om de opname door groei. Dus de opname \sim een factor \times de plantengroei, ofwel $jrGP^2$, waarbij j onze vijfde onbekende parameter is.
- *ruimtelijke verspreiding planten*: Klausmeier nam aan dat de verspreiding van

planten over een terrein beschreven kan worden door een *diffusieproces*. Ofwel, hij nam aan dat begroeiing zich op dezelfde manier verspreidt als een drupje melk zich door de hete thee verspreidt, of zoals warmte zich verspreidt door een metalen plaat. Ook dit is natuurlijk weer een sterk versimpelde aanname, maar als eerste begin wellicht niet zo slecht. In wiskundige termen betekent dit dat

$$\text{ruimtelijke verspreiding planten} \sim d_P \Delta P,$$

waarin d_P de *diffusie constante* voor plantenverspreiding is en Δ de zogenaamde *diffusie operator* is. Deze wordt gegeven door

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial Y^2},$$

de som van de tweede (partiële) afgeleide van $P(X, Y, T)$ naar X en die naar Y . Merk op dat door het karakter van deze term het Klausmeier model inderdaad een partiële differentiaalvergelijking geworden is: het model geeft een relatie tussen verschillende partiële afgeleiden van P en G , en P en G zelf.

• *ruimtelijke verspreiding (grond)water*: Klausmeier beschouwde in zijn model vegetatie op de helling van een heuvel en modelleerde de verspreiding van het water met een zogenaamde *advectie*-term, die ervoor zorgt dat het water de heuvel afstroomt. Wij doen het hier iets anders, we beschouwen een horizontaal terrein en nemen aan dat ook het water zich als in een diffusieproces verspreidt. Met andere woorden, ook de ruimtelijke verspreiding van het (grond)water modelleren we als $d_G \Delta G$. Ook dit is weer een grove versimpeling, meer realistische modellen beschrijven de verspreiding van grondwater aan de hand van een *niet-lineaire* diffusie operator. De diffusie constante d_G is onze laatste onbekende parameter. Omdat water zich veel, veel sneller verspreidt dan begroeiing kunnen we wel stellen dat $d_G \gg d_P$.

Het 'horizontale' Klausmeier model volgt nu door alle bovenstaande procesbeschrijvingen in te vullen in (1),

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial T} = n - lG - jrGP^2 + d_G \Delta G, \\ \frac{\partial P}{\partial T} = -mP + rGP^2 + d_P \Delta P. \end{cases} \quad (2)$$

Merk op dat dit model 7 onbekende (positieve) parameters heeft. Door de grove versimpelingen die gemaakt zijn bij het opstellen van het model is het ook niet eenvoudig – zo niet onmogelijk – om deze parameters te bepalen uit veldobservaties. Met andere woorden: op z'n best kan een idee worden gekregen van de grootte-orde van de parameters (zie [5]); het is eigenlijk niet mogelijk ze precies te bepalen.

3. Van Klausmeier naar Gray-Scott

Door te *schalen* kan het Klausmeier model in een vorm gebracht worden die er iets eenvoudiger uitziet, die iets beter geschikt is voor wiskundige analyse en

bovenal waarin het aantal onbekende parameters is teruggebracht tot 3. Het schalen van een vergelijking is niet een eenduidig geformuleerde procedure, er zit een zekere keuzevrijheid in. Ook is het vaak niet helemaal duidelijk hoe je het best kan beginnen (en waarom). Volgens veel wis- en natuurkundigen is (verstandig) schalen van een model eerder een ‘kunst’, dan een techniek.

Hier introduceren we eerst de nieuwe (geschaalde) grootheden U en V door middel van

$$U = \frac{l}{n} G \quad \text{en} \quad V = \frac{j l}{n} P$$

en vullen dat in in (2),

$$\begin{cases} \frac{n}{l} \frac{\partial U}{\partial T} = n - nU - \frac{rn^3}{jl^3} UV^2 + d_G \frac{n}{l} \Delta U, \\ \frac{n}{jl} \frac{\partial V}{\partial T} = - \frac{nm}{jl} V + \frac{rn^3}{j^2 l^3} UV^2 + d_P \frac{n}{jl} \Delta V. \end{cases}$$

Dat lijkt nog niet erg veel versimpeling te brengen, maar als we hier en daar wat termen uitdelen,

$$\begin{cases} \frac{j l^2}{r n^2} \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{j l^3}{r n^2} (1 - U) - UV^2 + d_G \frac{j l^2}{r n^2} \Delta U, \\ \frac{j l^2}{r n^2} \frac{\partial V}{\partial T} = - \frac{j m l^2}{r n^2} V + UV^2 + d_P \frac{j l^2}{r n^2} \Delta V, \end{cases}$$

en ook ruimte en tijd herschalen, ofwel t en (x, y) introduceren door middel van

$$t = \frac{r n^2}{j l^2} T \quad \text{en} \quad (x, y) = \left(\sqrt{\frac{r}{d_P j}} \frac{n}{l} X, \sqrt{\frac{r}{d_P j}} \frac{n}{l} Y \right),$$

dan ziet het er al een stuk beter uit:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{j l^3}{r n^2} (1 - U) - UV^2 + \frac{d_G}{d_P} \Delta U, \\ \frac{\partial V}{\partial t} = - \frac{j m l^2}{r n^2} V + UV^2 + \Delta V. \end{cases} \quad (3)$$

Merk op dat we de kettingregel hebben gebruikt om de afgeleiden naar T , X en Y uit te drukken in die naar t , x en y ; bijvoorbeeld,

$$\frac{\partial}{\partial T} = \frac{dt}{dT} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{r n^2}{j l^2} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Vergelijking (3) heeft inderdaad nog maar 3 parameters,

$$a = \frac{j l^3}{r n^2} > 0, \quad b = \frac{j m l^2}{r n^2} > 0 \quad \text{en} \quad d = \frac{d_G}{d_P} > 0. \quad (4)$$

Het is de *Gray-Scott vergelijking*, die de chemici Peter Gray en Stephen Scott in de jaren 80 hadden opgesteld om ruimtelijke processen in zogenaamde *auto-katalytische reacties* te beschrijven [3]. De vergelijking is buiten de scheikunde vooral bekend geworden door de simulaties van John Pearson [9] en de bijzondere patroondynamica die oplossingen van deze vergelijkingen vertonen:

het fenomeen van splitsende, ‘self-replicating’, gelokaliseerde patronen als pulsen en ‘stippen’ – zie [6, 1], sectie 8 en Figuur 4.

In de komende secties zullen we proberen iets van de wiskunde achter de patronen in de Gray-Scott vergelijking te gaan begrijpen. Daarvoor zullen we een aantal vereenvoudigingen introduceren. Allereerst gaan we ons beperken tot oplossingen U en V die alleen van de x -variabele afhangen. Dus $U = U(x, t)$ en $V = V(x, t)$ zijn oplossingen van de eendimensionale Gray-Scott vergelijking

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = d \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a(1-U) - UV^2, \\ \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - bV + UV^2. \end{cases} \quad (5)$$

In de context van de vegetatiepatronen betekent dit dat we als het ware een doorsnede nemen van de realistische patronen in Figuur 1b.

4. Het versimpelde model

De afleiding van het onderstaande versimpelde model is gebaseerd op de constatering dat de diffusie constante d in de Gray-Scott vergelijking (5) heel erg groot zal zijn in ons geval, ofwel in de situatie dat de Gray-Scott vergelijking z’n achtergrond heeft in het Klausmeier model voor vegetatiepatronen: d meet namelijk de verhouding tussen verspreidingssnelheid van (grond)water en die van planten (zie (4) en sectie 2). Als we dus alleen naar de U -vergelijking in (5) kijken, en aannemen dat alle andere grootheden groot noch klein zijn – iets dat vanzelfsprekend is/zou moeten zijn – dan staat daar, in ‘grof wiskundige’ termen,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \approx \frac{1}{d} (\text{niet groot, niet klein}) \approx \text{zeer klein.}$$

Het ligt nu voor de hand om de limietsituatie te beschouwen waarin $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$, hetgeen betekent dat U als functie van x te schrijven is als $U_0 + U_1 x$. De lineaire groei is echter zeer onnatuurlijk, omdat dit zou betekenen dat U , ofwel de geschaalde (grond)waterconcentratie uit het Klausmeier model, negatief kan worden, en onbegrensd voor grote x . Dus stellen we $U_1 = 0$, waardoor we als benaderend model voor (5) de scalaire vergelijking

$$\frac{\partial V}{\partial t} \approx \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + U_0 V^2 - bV$$

vinden, waarin U_0 een onbekende (positieve) constante is. Merk op dat de bovenstaande redenering a priori niet uitsluit dat U_0 nog van de tijd t afhangt. Echter, ook dat zou vanuit het standpunt van een aardwetenschapper een onnatuurlijk situatie zijn: omdat er is aangenomen dat de hoeveelheid regenval constant (in de tijd) is, en er verder geen andere factoren zijn die de toevoer van water beïnvloeden, is het niet realistisch om aan te nemen dat de ‘achtergrondconcentratie’ U_0 zomaar zou variëren in de tijd. De schaling

$$W = \frac{U_0}{b}V, \quad \xi = \sqrt{b}x, \quad \tau = bt,$$

levert nu de volgende benaderende modelvergelijking op

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - W + W^2, \quad (6)$$

voor de onbekende grootheid $W = W(\xi, \tau)$, die dus via de $V(x, t)$ -component in de Gray-Scott vergelijking (5) nog 'in de verte' gerelateerd is aan de begroeiingsconcentratie $P(X, T)$ in het oorspronkelijke Klausmeier model (2).

5. De existentie van stationaire patronen

De meest simpele patronen zijn de *trivial patterns* die niet van ruimte of tijd afhangen, ofwel de oplossing W van (6) waarvoor geldt dat $W(\xi, \tau) \equiv \bar{W}$, een constante. Dit geeft, door in te vullen,

$$0 = -\bar{W} + \bar{W}^2 \Rightarrow \bar{W} = W_0 = 0 \text{ of } \bar{W} = W_1 = 1$$

Merk op dat W_0 de woestijnachtige situatie representeert (nergens begroeiing), terwijl W_1 juist de 'gezonde' situatie beschrijft, waarin over het hele terrein een even dichte vegetatielaag ligt.

Patronen van het realistische type als in Figuur 1 zouden (misschien?) wel stationair kunnen zijn, dat wil zeggen: de vegetatie zou in principe in een evenwichtstoestand kunnen zijn en dus wellicht niet meer in de tijd veranderen, maar deze evenwichtspatronen hebben in ieder geval wel een structuur als functie van de plaatsvariabelen $(X, Y)/(x, y)/\xi$. Daarom introduceren we $w(\xi) = W(\xi)$: w beschrijft die oplossingen van (6) die niet afhangen van τ , ofwel, $w(\xi)$ is een oplossing van de *gewone* differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} - w + w^2 = 0. \quad (7)$$

Deze vergelijking kan (bijna) expliciet worden opgelost; (7) beschrijft in feite een 'vlakke niet-lineaire slinger' en is daarom *integreerbaar*. Dit kan ingezien worden door (7) met $\frac{dw}{d\xi}$ te vermenigvuldigen en te integreren,

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} \left(\frac{dw}{d\xi} \right) - w \frac{dw}{d\xi} + w^2 \frac{dw}{d\xi} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{d\xi} \right)^2 - \frac{1}{2} w^2 + \frac{1}{3} w^3 = H,$$

waarbij H een constante is die 'vrij' gekozen kan worden. Dus voor iedere H kan $\frac{dw}{d\xi}$ uitgedrukt worden in w ,

$$\frac{dw}{d\xi} = \pm \sqrt{2H + w^2 - \frac{2}{3}w^3}. \quad (8)$$

In Figuur 2a zijn een aantal *niveaукrommen* geplot, dat wil zeggen, voor een paar waarden van H zijn de krommes gegeven door (8) getekend in het $(w, \frac{dw}{d\xi})$ -fasevlak. De 'trivial patterns' W_0 en W_1 keren hier terug als de kritieke punten $(0, 0)$, een zogenaamd zadelpunt, en $(1, 0)$, een centrumpunt – zie bijvoorbeeld [4] voor meer achtergrond bij deze terminologie (en dit soort systemen).

Hierin correspondeert W_0 met $H = H_{\text{hom}} = 0$, en W_1 met $H = H_{\text{center}} = -\frac{1}{6}$. Dit volgt uit (8) door $(w, \frac{dw}{d\xi}) = (0, 0)$ of $(0, 1)$ in te vullen en vervolgens H op te lossen.

Wat opvalt is dat de verzameling $H = H_{\text{hom}}$ groter is dan alleen het punt $(0, 0)$, de gehele kromme (in Figuur 2a) die begint en eindigt op het punt $(0, 0)$ ligt namelijk ook op deze niveaukromme. Deze kromme representeert een bijzondere en belangrijke oplossing van (7), en dus van (6), het is een zogenaamde *homocliene baan*. Er bestaat zelfs een expliciete uitdrukking van deze oplossing $W_{\text{hom}}(\xi)$ van (7),

$$W_{\text{hom}}(\xi) = W_{\text{hom}}(\xi; \xi_0) = \frac{3}{2 \cosh^2 \frac{1}{2}(\xi - \xi_0)} = \frac{6}{e^{\xi - \xi_0} + 2 + e^{-(\xi - \xi_0)}} \quad (9)$$

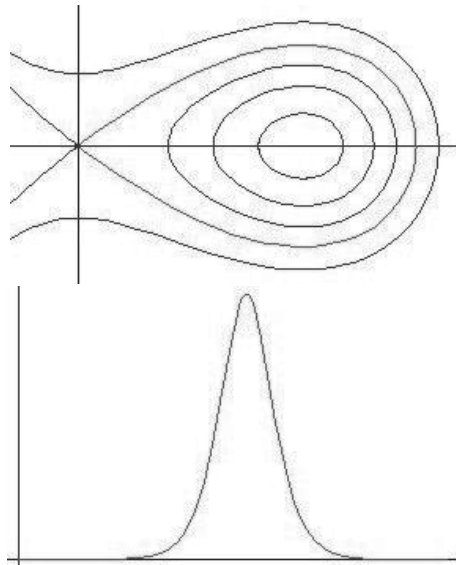
(hetgeen aan de hand van enig rekenwerk is na te gaan door (9) in te vullen in (7)). Dit homocliene ‘puls’-patroon is geschetst als functie van ξ in Figuur 2b. Als vegetatiepatroon representeert $W_{\text{hom}}(\xi; \xi_0)$ een gelokaliseerde ‘oase’ van begroeiing rond het punt $\xi = \xi_0$ in een (zo goed als onbegroeide) woestijn. Vanuit een wiskundig gezichtspunt vormen de homocliene patronen $W_{\text{hom}}(\xi; \xi_0)$ een bouwsteen voor meer realistische patronen als die in Figuur 1b: een homocliene oase correspondeert dan met een doorsnede van één van de begroeiingsstroken.

Dit beeld wordt iets duidelijker als we ook de patronen $W_{\text{per}}(\xi; H)$ die in het fasevlak in Figuur 2a in het gebied ingesloten door $W_{\text{hom}}(\xi)$ liggen (de ‘periodieke patronen’), als ruimtelijke structuren interpreteren. Deze banen liggen op de niveaukrommen van (8) met waarden van H tussen $H_{\text{center}} = -\frac{1}{6}$ en $H_{\text{hom}} = 0$. Voor deze waarden van H oscilleert de ‘begroeiing’ $W_{\text{per}}(\xi; H)$ periodiek tussen een minimale en maximale waarde; $W_{\text{per}}(\xi; H)$ representeert dus een landschap waarin de begroeiing regelmatig varieert tussen meer en minder dicht. Als H dicht bij $H_{\text{hom}} = 0$ wordt gekozen, passeert $W_{\text{per}}(\xi; H)$ elke periode dicht langs de waarde $W = 0$. Het vegetatiepatroon lijkt dan dus op een periodieke afwisseling tussen (bijna) homocliene oases en (zo goed als) onbegroeide gebieden. Ofwel: de bijna homocliene periodieke banen $W_{\text{per}}(\xi; H)$ met $H \approx H_{\text{hom}}$ corresponderen inderdaad grofweg met realistische patronen als in Figuur 1b, waarin begroeide gebieden worden afgewisseld met onbegroeide stukken grond.

Er zijn meer stationaire patronen dan de hier tot nu toe besproken ($W_{0,1}$, $W_{\text{hom}}(\xi)$ en $W_{\text{per}}(\xi; H)$). Voor iedere $H > H_{\text{center}} = -\frac{1}{6}$ is er een kromme die buiten het gebied ingesloten door de homocliene baan (in het fasevlak) ligt – zie wederom Figuur 2a. Deze banen corresponderen echter met vegetatiepatronen waarbij de begroeiing negatief en onbegrensd wordt. Dit soort patronen zijn natuurlijk niet realistisch; vanuit het oogpunt van de vegetatiedynamica hebben alleen $W_{0,1}$, $W_{\text{hom}}(\xi)$ en $W_{\text{per}}(\xi; H)$ betekenis.

6. Stabiliteit

Nu we een duidelijk inzicht hebben in de aard van de *mogelijke* stationaire patronen die kunnen optreden in het versimpelde model (6) kunnen, of beter:



Figuur 2. Het faseportret horende bij het stationaire probleem (7) en de homocliene puls of ‘oase’ $W_{\text{hom}}(\xi)$ als functie van ξ .

moeten, we de vraag stellen: “Kunnen deze patronen wel worden waargenomen?”. In een meer wiskundige terminologie: “Zijn ze stabiel?”.

Wat betekent stabiliteit eigenlijk, en wat heeft het te maken met waarneembaarheid? Het idee is eenvoudig. Stel dat $W_s(\xi)$ een van de stationaire patronen uit sectie 5 is. In de realiteit – zowel vanuit een ecologisch als vanuit een meer wiskundig perspectief – is een oplossing van (6) *nooit exact gelijk aan* $W_s(\xi)$, er is altijd op zijn minst sprake van een kleine fout (denk bijvoorbeeld ook aan afrondingsfouten in een computersimulatie). Met andere woorden, een bijna-stationaire oplossing $W(\xi, \tau)$ van (6) is van de vorm

$$W(\xi, \tau) = W_s(\xi) + \varepsilon \tilde{W}(\xi, \tau) \quad (10)$$

waarbij $\varepsilon > 0$ verondersteld wordt asymptotisch klein te zijn; dit wordt genoteerd met $0 < \varepsilon \ll 1$. De vraag is nu: hoe ontwikkelt de fout/verstoring $\tilde{W}(\xi, \tau)$ zich in de tijd? Als $\tilde{W}(\xi, \tau)$ begrensd blijft, of zelfs kleiner wordt bij toenemende τ , dan is het gerechtvaardigd om $W_s(\xi)$ *stabiel* te noemen: kleine verstoringen blijven dan klein, en de oplossing $W(\xi, \tau)$ van (6) blijft dicht bij $W_s(\xi)$ als τ varieert. Zo’n patroon $W_s(\xi)$ is dan ook waar te nemen, bijvoorbeeld in een computersimulatie van (6) die je opstart op $\tau = 0$ met een $W(\xi, 0)$ die gegeven wordt door $W_s(\xi)$ of iets wat daar (voldoende) op lijkt. Als $\tilde{W}(\xi, \tau)$ echter gaat groeien als functie van τ dan betekent dat dat de oplossingen van (6) niet in de buurt kunnen blijven van $W_s(\xi)$; $W_s(\xi)$ is dan *instabiel* en niet waarneembaar: de toestand van het systeem kan niet in de buurt van dit patroon zijn.

Intuïtief is deze situatie vergelijkbaar met die van een vrij slingerende staaf. Zo'n staaf kan recht overeind gezet worden. Deze stationaire situatie is een mogelijke oplossing van het bijbehorende model, maar iedere willekeurig kleine verstoring 'duwt' de slinger weg uit het evenwicht, en de slinger zal niet terugkeren in de volledig rechtop- en stilstaande situatie. Slingers kunnen niet stabiel rechtop staan: hoewel het stationaire evenwicht bestaat is het niet waarneembaar. Merk op dat de verstoorte rechtopstaande slinger na lang heen en weer slingeren door de wrijving uiteindelijk recht naar beneden zal komen te hangen. Dit is ook een stationair evenwicht, dat duidelijk wel stabiel en waarneembaar is: een kleine beginverstoring dempt juist uit, de slinger keert terug naar de beginsituatie.

De vraag is dus of we iets kunnen zeggen over de groei van $\tilde{W}(\xi, \tau)$. Daarvoor leiden we eerst een (benaderende) vergelijking af voor $\tilde{W}(\xi, \tau)$. We vullen dus (10) in in (6) en maken gebruik van het feit dat $W_s(\xi)$ niet van τ afhangt en een oplossing is van (7):

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \xi^2} - \tilde{W} + 2W_s(\xi)\tilde{W} + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (11)$$

waarbij we een factor ε hebben uitgedeeld en ' $\mathcal{O}(\varepsilon)$ ' de kwadratische termen representeert (die ook na het uitdelen van ε nog met een factor ε worden vermenigvuldigd). Deze termen zijn dus zeer klein en worden dan ook verwaarloosd – dit wordt *lineariseren* genoemd. Omdat de resulterende vergelijking lineair is en niet expliciet van τ afhangt mogen we aannemen dat de verstoring $\tilde{W}(\xi, \tau)$ een simpele vorm heeft: met behulp van Fourier-theorie kan worden aangetoond dat iedere willekeurige verstoring $\tilde{W}(\xi, \tau)$ opgebouwd kan worden uit uitdrukkingen die te schrijven zijn als het product van een exponentiële uitdrukking in τ en een willekeurige functie van ξ ,

$$\tilde{W}(\xi, \tau) = e^{\lambda t} \omega(\xi). \quad (12)$$

Als we dit invullen in (11), de termen met ε verwaarlozen en een factor $e^{\lambda t}$ uitdelen, dan komen we uit op het volgende *eigenwaardeprobleem* voor de functie $\omega(\xi)$,

$$\frac{d^2 \omega}{d\xi^2} - \omega + 2W_s(\xi)\omega = \lambda \omega, \quad (13)$$

waarin λ een onbekende constante is. Deze constante heet een *eigenwaarde* van (13), de bijbehorende oplossing $\omega(\xi)$ een *eigenfunctie*. Eigenwaarden zijn over het algemeen complexwaardig, ofwel $\lambda \in \mathbb{C}$, hetgeen betekent dat λ te schrijven is als $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ met $\lambda_{r,i} \in \mathbb{R}$ en $i = \sqrt{-1}$, ofwel $i^2 = -1$. Voor een complexwaardige exponentiële uitdrukking als in (12) geldt (per definitie) dat

$$e^{\lambda \tau} = e^{\lambda_r \tau} (\cos \lambda_i \tau + i \sin \lambda_i \tau).$$

Merk op dat dit dus betekent dat het teken λ_r , het *reële deel* van λ , bepaalt of de verstoring $\tilde{W}(\xi, \tau)$ groeit of niet: de amplitude-factor $e^{\lambda_r \tau}$ groeit namelijk

onbegrensd in τ als $\lambda_r > 0$ en convergeert (snel) naar 0 als $\lambda_r < 0$. Met andere woorden, λ_r bepaalt de stabiliteit van het patroon $W_s(\xi)$. Overigens, dit beschrijft een algemene situatie, het is niet al te moeilijk om aan te tonen dat de eigenwaarden van (13) altijd reëel moeten zijn, zodat hier $\lambda = \lambda_r$ en het teken van λ de stabiliteit van $W_s(\xi)$ aangeeft.

De stabiliteit van een patroon $W_s(\xi)$ wordt dus bepaald door (het antwoord op) de vraag: "Welke waarden kan/mag de eigenwaarde λ in (13) aannemen?". Dit is in het algemeen geen eenvoudig te beantwoorden vraag. In het algemeen heeft een vergelijking als (13) voor iedere λ vele oplossingen $\omega(\xi)$, maar deze oplossingen zullen (weer in het algemeen) allemaal onbegrensd zijn, dan wel voor $\xi \rightarrow \infty$ of voor $\xi \rightarrow -\infty$; zie het voorbeeld hieronder. Omdat $\omega(\xi)$ (via (12)) een verstoring modelleert (10) is dit niet toegestaan: vanuit het standpunt van de stabiliteitsanalyse is het niet realistisch, storingen worden verondersteld klein te zijn. Dit betekent dat $\tilde{W}(\xi, \tau)$ en dus $\omega(\xi)$ begrensd moet zijn als functie van ξ (de aanname dat de verstoring klein is wordt vastgelegd door ε in (10)). Alleen voor speciale waarden van λ – de eigenwaarden – heeft (13) begrensde oplossingen, die dus overeenkomen met toegestane verstoringen.

We beschouwen eerst het simpelste geval, dat van de *triviale* patronen $W_s(\xi) \equiv W_0$ of $W_s(\xi) \equiv W_1$. In dit geval is (13) een lineaire vergelijking waarvan de coëfficiënten niet expliciet van ξ afhangen, zodat we wederom op basis van Fourier-theorie $\omega(\xi)$ mogen schrijven als een e -macht, $e^{k\xi}$. Echter, als het reële deel κ_r van κ niet identiek gelijk is aan 0, dan zal deze verstoring onbegrensd groot worden (voor positieve ξ als $\kappa_r > 0$ en voor negatieve ξ als $\kappa_r < 0$). Dit is niet realistisch, zoals zojuist beargumenteerd. We concluderen dus dat $\kappa = ik$, met $k \in \mathbb{R}$.

Aan dit alles moet nog worden toegevoegd dat verstoringen natuurlijk ook niet complexwaardig kunnen zijn. Uit het bovenstaande volgt dat (in dit geval),

$$\tilde{W}(\xi, \tau) = e^{\lambda\tau + k\xi} = \left[e^{\lambda_r\tau} \cos(\lambda_i\tau + k\xi) \right] + i \left[e^{\lambda_r\tau} \sin(\lambda_i\tau + k\xi) \right].$$

Hoewel we vooral voor het gemak rekenen met de complexe e -machten, heeft alleen het reële deel van deze verstoring, $e^{\lambda_r\tau} \cos(\lambda_i\tau + ik\xi)$, betekenis binnen het model: de 'basisverstoring' is een al of niet groeiend periodiek patroon.

Invulling van $\omega(\xi) = e^{ik\xi}$ in (13) geeft de volgende relaties tussen λ en k :

$$\lambda = -1 - k^2 \text{ als } W_s(\xi) = W_0 \equiv 0, \quad \lambda = +1 - k^2 \text{ als } W_s(\xi) = W_1 \equiv 1.$$

Dus $\lambda \leq -1$ in het geval van de 'woestijn' W_0 : de woestijn is stabiel en waarneembaar. Daarentegen is de homogeen begroeide situatie beschreven door W_1 instabiel – omdat er eigenwaarden $\lambda > 0$ bestaan – en kan deze dus niet waargenomen worden (binnen dit model).

7. De instabiliteit van de inhomogene patronen

De (in)stabiliteit van de ruimtelijk inhomogene patronen is minder eenvoudig te bepalen. In het algemeen is het niet mogelijk de λ 's waarvoor (13) begrensde

oplossingen heeft expliciet te bepalen. Echter, in het geval van de homocliene pulse $W_{\text{hom}}(\xi)$ zijn 2 eigenwaarden en hun bijbehorende eigenfuncties wel direct te bepalen,

$$\lambda_0 = \frac{5}{4} > 0 \quad \text{met} \quad \omega_0(\xi) = (W_{\text{hom}}(\xi))^{\frac{3}{2}} \quad (14)$$

en

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{met} \quad \omega_1(\xi) = \frac{d}{d\xi} W_{\text{hom}}(\xi) \quad (15)$$

Het rechttoe-rechtaan controleren van de claim dat het paar $(\lambda_0, \omega_0(\xi))$ gegeven in (14) inderdaad voldoet aan (13) is al een niet-triviale klus; het zonder voorkennis afleiden van dit paar uit (13) is eigenlijk alleen mogelijk met behulp van kennis van zogenaamde ‘*hypergeometrische functies*’, nadat (13) getransformeerd is tot een hypergeometrische differentiaalvergelijking – zie [2]. Niettemin, als we dit als (controleerbaar) feit accepteren dan kunnen we meteen weer concluderen dat ook de ‘homocliene oase’ $W_{\text{hom}}(\xi)$ instabiel is – λ_0 is tenslotte positief – en dus ook niet kan worden waargenomen in het versimpelde model (6).

Eigenlijk is het feit dat we λ_0 expliciet kunnen bepalen voor $W_{\text{hom}}(\xi)$ ‘een wonder’; in meer algemene situaties is zo iets zeker niet mogelijk. Iets soortgelijks lukt ook niet voor het eigenwaardeprobleem horende bij de periodieke patronen $W_{\text{per}}(\xi; H)$. Toch is het ook voor deze patronen mogelijk om – op een indirecte manier – te laten zien dat ook deze allemaal instabiel zijn.

Als eerste stap is het nodig om in te zien waarom $\lambda_1 = 0$ een eigenwaarde is, en waarom dat niet alleen voor $W_{\text{hom}}(\xi)$ geldt, maar ook voor alle $W_{\text{per}}(\xi; H)$. Het feit dat $\lambda = 0$ een eigenwaarde is voor alle inhomogene patronen heeft te maken met de ‘*translatie-invariantie*’ van vergelijking (6). Translatie-invariante betekent niets anders dan dat als $W(\xi, \tau)$ een oplossing is van (6), dat het over een afstand ξ_0 verschoven patroon $W(\xi - \xi_0, \tau)$ dat ook is – hetgeen eenvoudig is na te gaan door $W(\xi - \xi_0, \tau)$ te substitueren in (6). Deze eenvoudige observatie geldt natuurlijk ook voor alle stationaire patronen $W_s(\xi)$ en was al expliciet gemaakt voor $W_{\text{hom}}(\xi) = W_{\text{hom}}(\xi; \xi_0)$ in (9). Als ξ_0 heel klein is, ofwel als $\xi_0 = \varepsilon \ll 1$, dan kan de verschuiving $W_s(\xi - \varepsilon)$ gezien worden als een verstoring van $W_s(\xi)$ (10), die met behulp van enige kennis van Taylor-ontwikkelingen ook expliciet gemaakt kan worden,

$$W_s(\xi - \varepsilon) = W_s(\xi) - \varepsilon \frac{d}{d\xi} W_s(\xi) + \text{termen van grootte } \varepsilon^2 \text{ en kleiner.}$$

Dus de verstoring die de translatie-invariantie representeert is geassocieerd met (plus of min) de afgeleide $\frac{d}{d\xi} W_s(\xi)$ van het basispatroon – zie (10). Deze uitdrukking komen we ook tegen als de eigenfunctie $\omega_1(\xi)$ horende bij $\lambda_1 = 0$ in (15). Omdat deze verstoring door de translatie-invariantie niet zal groeien of krimpen, is het niet verrassend dat $\lambda = 0$ de eigenwaarde is die bij deze verstoring hoort.

Dit hadden we ook allemaal in een keer kunnen zien door de afgeleide naar ξ te nemen in (7):

$$\frac{d^3 w}{d\xi^3} - \frac{dw}{d\xi} + 2w \frac{dw}{d\xi} = 0.$$

Door deze uitdrukking met (13) te vergelijken, zien we dat de afgeleide $\frac{dw}{d\xi}(\xi)$ van een oplossing $w(\xi)$ van (7), een oplossing van (13) is bij eigenwaarde $\lambda = 0$. Dus we kunnen concluderen dat $\lambda = 0$ een eigenwaarde is voor alle inhomogene stationaire patronen $W_s(\xi)$. De bijhorende eigenfunctie is de afgeleide van $W_s(\xi)$, en op basis van bovenstaande argumentatie concluderen we dat deze eigenwaarde de translatie-invariantie van (6) representeert.

De vraag is nu: “Is de eigenwaarde $\lambda = 0$ ook de grootste eigenwaarde?”. Zo ja, dan is het patroon stabiel (alle andere eigenwaarden zijn dan negatief), zo nee, dan is $W_s(\xi)$ instabiel. Het antwoord is nee, en de reden hiervoor is verrassend topologisch. De afgeleide van een stationaire oplossing $W_s(\xi)$ van (7) heeft namelijk altijd nulpunten (een unieke voor de homocliene puls – zie Figuur 2b, oneindig veel voor de periodieke patronen). Dit kan ook meteen gezien worden in Figuur 2a: alle begrensde banen doorsnijden de horizontale w -as, ofwel de as $\frac{dw}{d\xi} = 0$. Het feit dat de bijbehorende eigenfunctie nulpunten heeft betekent automatisch dat $\lambda = 0$ niet de grootste eigenwaarde kan zijn. Algemene (en klassieke) wiskundige theorie van eigenwaarden van het type (13) – zie [8, 11] – zegt namelijk dat de eigenfunctie horende bij de ‘meest kritische’ ofwel grootste eigenwaarde geen nulpunten kan hebben (en andersom: als de eigenfunctie geen nulpunten heeft dan is de bijbehorende eigenwaarde de grootste). Dus het volgt onmiddellijk uit de algemene theorie dat ook de periodieke patronen in ons versimpelde model allemaal instabiel zijn.

Afsluitend kan nog opgemerkt worden dat we bij nader inzien het expliciete eigenwaarde/eigenfunctie paar $(\frac{5}{4}, \omega_0(\xi))$ uit (14) dus helemaal niet nodig hebben gehad om de instabiliteit van de homocliene oase te concluderen. Echter, we weten uit de combinatie van de bovenstaande argumenten nu wel dat $\lambda_0 = \frac{5}{4}$ de grootste eigenwaarde is – $\omega_0(\xi)$ heeft namelijk geen nulpunten (14).

8. Patronen in de Gray-Scott vergelijking

Hoewel we er in geslaagd zijn om de existentie en stabiliteit van alle relevante stationaire patronen in het modelprobleem (6) te bepalen – en dat is bepaald uitzonderlijk – schieten we daar vanuit het oogpunt van de vegetatiepatronen weinig mee op: alle patronen die ‘in de verte’ lijken op realistische patronen blijken instabiel te zijn, en kunnen dus niet worden waargenomen.

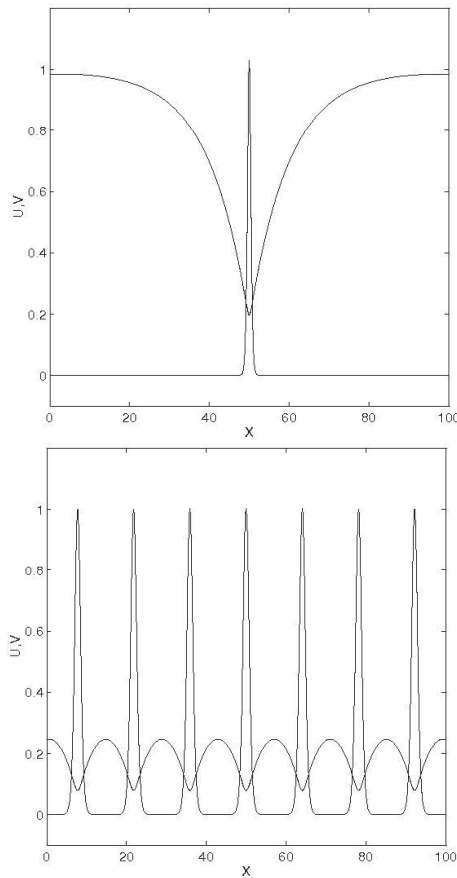
De ‘afleiding’ van het modelprobleem in sectie 4 geeft a priori ook weinig hoop dat de situatie heel erg anders kan zijn in het volledige systeem – de Gray-Scott vergelijking (5), of (3). Dus, via de directe koppeling tussen het Gray-Scott model en het Klausmeier model (2) uit sectie 3, lijkt de wiskundige conclusie te moeten zijn dat het Klausmeier model weinig zegt over vegetatiepatronen ...

Dit is echter niet het geval, zoals op overtuigend is aangetoond in Klausmeiers oorspronkelijke verhaal [5] aan de hand van numerieke simulaties.

Deze schijnbare discrepantie tussen wiskundig theorie en de (numerieke) ‘realiteit’ was al bekend uit het werk van John Pearson, die een uitgebreide numerieke verkenning had gedaan van patroonvorming in het Gray-Scott model in [9]. Natuurlijk is er geen sprake van een echte tegenspraak: de intuïtieve gedachtengang in sectie 4 is incorrect, in de zin dat model (6) wel een beeld geeft van een aspect van de oplossingen van het gehele model, de Gray-Scott vergelijking (5), maar dat voorspellingen over met name de stabiliteit van patronen in (5) op basis van (6) niet mogelijk zijn. De Gray-Scott vergelijking (5) is namelijk ‘singulier gestoord’, de diffusie constante d is zeer groot (zie sectie 4), zodat de U -component op een veel langere (ruimte-)schaal verandert dan de V -component. Dit heeft een zeer ‘singuliere’ invloed op de dynamica van (5), vooral in relatie tot die van de ‘singuliere limiet’ (6).

Zoals al opgemerkt in de inleiding, is het niet mogelijk om hier dieper in te gaan op de existentie- en stabiliteitsanalyse van stationaire patronen in het Gray-Scott model. Wel kunnen we een paar opmerkingen maken over de verschillen met de analyse van vergelijking (6) zoals gepresenteerd in secties 5, 6 en 7. De existentie-analyse voor (6) speelt zich af in een tweedimensionaal fasevlak, zie Figuur 2a. De faseruimte horende bij de stationaire Gray-Scott vergelijking is *vierdimensionaal*. Dit maakt bijvoorbeeld de zoektocht naar homocliene (‘oase’) patronen significant moeilijker (zie [1] en Figuur 3a).

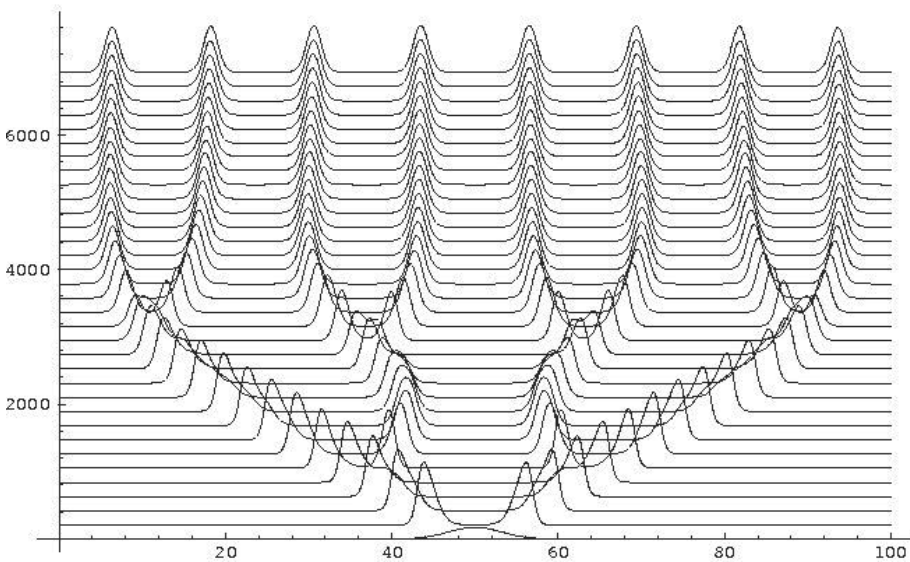
Iets soortgelijks geldt ook voor de stabiliteitsanalyse. Er is wat dit betreft eigenlijk maar een overeenkomst tussen (5) en (6): ook in de Gray-Scott vergelijking – en dus in het Klausmeier model (2) – is het ‘triviale’ woestijnpatroon waarin $V \equiv 0$ – ofwel $P \equiv 0$ in (2) – altijd stabiel (hetgeen vrij eenvoudig is na te gaan). Veel ingewikkelder ligt het voor de ‘homocliene oase’ (Figuur 3a). Hoewel nog steeds geldt dat $\lambda = 0$ altijd een eigenwaarde is van het stabiliteitsprobleem horende bij de puls, met een (vectorwaardige) eigenfunctie die gegeven wordt door de afgeleide van de puls, bestaat er nu geen ‘topologische’ theorie die iets zegt over het aantal nulpunten van de eigenfunctie horende bij de meest kritische eigenwaarde. Deze ‘Sturm-Liouville theorie’ [11, 8] is strict ‘scalair’ en kan niet toegepast worden op systemen als (5). Verder geldt ook niet langer dat de eigenwaarden reëel moeten zijn, sterker nog, de (in)stabiliteit van het pulspatroon in (5) wordt grotendeels bepaald door complexwaardige eigenwaarden. In [2] is een theorie ontwikkeld die de hierboven beschreven schijnbare discrepantie tussen de wiskunde en de numerieke simulaties opheft en die duidelijk maakt waarom pulspatronen in systemen als (5) stabiel kunnen zijn, terwijl ze dat zeker niet zijn in een ‘singuliere limiet’ als (6). Deze ‘stabilisatie door koppeling aan een langzaam variërende vergelijking’ is een behoorlijk subtiel proces. De homocliene puls is zeker ook niet altijd stabiel, maar, het volgt uit [2] dat er gebieden in de (a, b, d) -parameterruimte horende bij (5) bestaan waarin die puls stabiel is. Met andere woorden: er zijn combinaties van de parameters a , b en d in (5) waarvoor de pulsoplossing stabiel is. Via de transformaties in sectie 3 volgt nu dat er dus ook (een ruime klasse van) combinaties van de parameters d_G, d_P, j, l, m, n en r in het Klausmeier model (2) is waarvoor de (eendimensionale) homocliene oase stabiel en dus waarneembaar is.



Figuur 3. Twee voorbeelden van stationaire patronen in de Gray-Scott vergelijking (5); (a): de homocliene oase; (b) een 'bijna homocliën' ruimtelijk periodiek patroon. Deze plots zijn verkregen uit een numerieke simulatie van de Gray-Scott vergelijking en zijn (dus) stabiel. Merk op dat de V -puls in (a) in essentie een geschaalde versie is van de W -puls in Figuur 3b en dat de U -concentratie langzaam verandert ten opzichte van de 'scherpe' veranderingen in V . Merk ook op dat het patroon in (b) een soort 'niet-lineaire som' is van geschaalde kopieën van de homocliene puls in (a).

De eendimensionale Gray-Scott vergelijking heeft ook de bijna homocliene patronen waarin de woestijn periodiek wordt afgewisseld met gelocaliseerde plukjes begroeiing – zie Figuur 3b en [1]. Met een uitbreiding van de theorie ontwikkeld in [2] kan ook van deze meer realistische patronen – ze beginnen tenslotte te lijken op eendimensionale doornijdingen van echte vegetatiepatronen als in Figuur 1b – worden aangetoond dat ze stabiel kunnen zijn.

Tenslotte dient wel te worden opgemerkt dat de Gray-Scott vergelijking



Figuur 4. Dynamische patroonvorming in het Gray-Scott vergelijking: splitsende 'self-replicating' pulsen. De y -as geeft het tijdsverloop aan: de V -component is geplot als functie van ξ voor een zekere reeks tijdstippen. Een patroon dat op $\tau = 0$ bestond uit één gelokaliseerde V -puls splitst enige malen totdat een (stabiel) ruimtelijk periodiek patroon als in Figuur 3b (met hier 8 pulsen) gevormd is.

een veel rijkere dynamica heeft dan tot nu toe besproken is. In Figuur 4 wordt een numerieke simulatie gegeven van een zogenaamde 'splitsende puls'. Dit verschijnsel is een prachtig voorbeeld van dynamica van patronen en werd voor het eerst waargenomen door John Pearson in zijn simulaties van het Gray-Scott model [9, 6]. Momenteel is er veel meer bekend over dit fenomeen, bijvoorbeeld dat het generiek is en kan optreden in een grote klasse van reactie-diffusievergelijkingen, maar een echt wiskundig inzicht in dit verschijnsel ontbreekt nog grotendeels.

9. Terug naar de woestijn

Wat kan het in de voorgaande secties opgebouwde wiskundig inzicht in de dynamica van (eenvoudige) patronen in het eindimensionale Gray-Scott model (5) nu betekenen voor een beter begrip van verwoestijning?

Het is duidelijk dat modellen als dat van Klausmeier (2) en de eindimensionale geschaalde variant (5) niet direct gebruikt kunnen worden om kwantitatieve voorspellingen te doen over de overlevingskans van bestaande begroei-

ing aan de rand van een woestijn als in Figuur 1b. Daarvoor zijn veel realistischere modellen nodig (die veel meer componenten zullen hebben). Echter, inzicht in de dynamica van patronen in vereenvoudigingen als (5) geeft wel fundamenteel begrip in de catastrofe – ofwel het opeens volledig verdrogen van een gebied dat tot voor kort nog bestond uit een vegetatiepatroon als in Figuur 1b – die de verwoestijning veroorzaakt. Deze vegetatiepatronen corresponderen in één ruimte-dimensie namelijk met de singuliere ruimtelijk periodieke patronen in Figuur 3b en 4. We weten nu dat deze stabiel kunnen zijn, maar dat ze ook, bijvoorbeeld als de regenval n in (2) afneemt (hetgeen impliceert dat a en b groter worden in (5) – zie (4) en [1, 2]) zullen destabiliseren. Wiskundig gezien is de ‘catastrofe’ niets anders dan het instabiel worden van de multi-puls patronen. Omdat de triviale ‘woestijnoplossing’ van (5) met $V \equiv 0$ stabiel is voor alle a, b, d worden de oplossingen van (5) in dit geval op korte tijdschaal aangetrokken door de woestijn en treedt er dus verwoestijning op. Dit verklaart met name waarom er geen geleidelijke overgang plaatsvindt van begroeid terrein naar woestijn. Dit mechanisme lijkt ook in de meer realistische modellen een belangrijke rol te spelen. De wiskunde kan inzicht geven in de fundamentele processen die de verwoestijning veroorzaken, onafhankelijk van de precieze vorm (eenvoud/complexiteit) van het model.

Er zijn ook meer subtiele vragen waar wiskundig begrip van de dynamica van de vegetatiepatronen inzicht kan bieden. Bijvoorbeeld is het bekend dat vele ruimtelijk periodieke patronen in het Gray-Scott model tegelijkertijd stabiel kunnen zijn (zie bijvoorbeeld Figuur 3: beide patronen zijn stabiel voor dezelfde waarden van a , b en d). Echter, deze patronen destabiliseren voor verschillende waarden van n (omgerekend via (4)). Met andere woorden, sommige vegetatiepatronen zijn ‘robuuster’ dan andere, kunnen het langer volhouden met minder regenval. Als deze wiskundige constatering gekwantificeerd kan worden in termen die meetbaar zijn voor realistische vegetatiepatronen dan kan dit wellicht een nuttig inzicht geven bij het inschatten hoe groot de kans is dat een gegeven gebied verwoestijnt (ofwel: bij het inschatten hoe dicht het gegeven patroon is bij de destabilisatie-catastrofe).

Dit zijn voorbeelden van onderwerpen waaraan sinds kort door Amsterdamse wiskundigen (Geertje Hek, Sjors van der Stelt en Arjen Doelman) te zamen met de milieuwetenschapper Max Rietkerk en zijn Utrechtse groep onderzoek wordt gedaan.

De bovenstaande vraag kan (en moet) natuurlijk ook worden omgekeerd: “Genereren de vragen over verwoestijning ook de ontwikkeling van nieuwe wiskundige theorie?”. Het antwoord is zonder twijfel ja. Het vakgebied patroonvorming kan gezien worden als onderdeel van het vak *dynamische systemen*. Dit is een deelgebied van de wiskunde waarvan de ontwikkeling zeer sterk beïnvloed is door de interactie met toepassingen. Wellicht het bekendste voorbeeld hiervan is het werk van de meteoroloog Ed Lorenz, die een gereduceerd wiskundig model opstelde voor convectie, ofwel de luchtcirculatie die veroorzaakt wordt door verwarming van onderaf, in de atmosfeer [7]. Dit artikel, en in het bijzonder de in dit artikel beschreven ‘strange attractor’ die ook wel ‘de vlinder van Lorenz’ wordt genoemd, heeft een zeer stimulerende

invloed gehad op het vakgebied dynamische systemen.

De splitsende pulsen uit Figuur 4 zijn hier ook een voorbeeld van. Dit verschijnsel is eerst ontdekt in de context van chemische reacties [6] en heeft tot veel wiskundig onderzoek geleid. Net als de 'attractor' in Lorenz' vergelijking is bijvoorbeeld gebleken dat het verschijnsel niet alleen als scheikundig proces optreedt, maar ook ver daar buiten relevant is, niet in de minste plaats binnen de wiskunde zelf. In principe is het niet uit te sluiten dat het ook een rol speelt in het Klausmeier model, maar dat zou dan zijn bij toenemende regenval, en dat is een vooralsnog niet erg relevante situatie. Een ander voorbeeld van vragen die het verwoestijningsproces aan de wiskunde stelt is: 'Hoe ziet het randgebied tussen de woestijn en een vegetatiepatroon er uit? Beweegt die rand in de tijd (bij gelijkblijvende omstandigheden, ofwel als de regenval n neemt niet afneemt)? Zo ja, herwint de beplanting grondgebied, of breidt de woestijn zich ook uit als n gelijkblijft?' Vertaald in wiskundige termen zijn dit vragen over de *interactie* van (verschillende) patronen. Dit is een onderdeel van het vakgebied patroonvorming dat momenteel als wiskundig probleem in het centrum van de belangstelling staat.

Literatuur

1. A. DOELMAN, T.J. KAPER, P.A. ZEGELING [1997], Pattern formation in the 1-D Gray-Scott model, *Nonlinearity* **10**, 523–563.
2. A. DOELMAN, R. A. GARDNER, T.J. KAPER [2002], A stability index analysis of 1-D patterns of the Gray-Scott model, *Memoirs of the AMS* **155**(737).
3. P. GRAY, S.K. SCOTT [1984], Autocatalytic reactions in the isothermal, continuous stirred tank reactor: oscillations and instabilities in the system $A + 2B \rightarrow 3B, B \rightarrow C$, *Chem. Eng. Sci.* **39**, 1087–1097.
4. J. GUCKENHEIMER, P. HOLMES, 'Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields', Applied Mathematical Sciences **42**, Springer.
5. C. A. KLAUSMEIER [1999], Regular and irregular patterns in semiarid vegetation, *Science* **284**, 1826–1828.
6. K.-J. LIN, W.D. MCCORMICK, J.E. PEARSON, H.L. SWINNEY [1994], Experimental observation of self-replicating spots in a reaction-diffusion system, *Nature* **369**(6477), 215–218.
7. E. LORENZ [1963], Deterministic, non-periodic flow, *J. Atmos. Sc.* **20**, 130–141.
8. W. MAGNUS, S. WINKLER [1966], *Hill's equation*, Wiley Interscience.
9. J.E. PEARSON [1993], Complex patterns in a simple system, *Science* **261**, 189–192.
10. H. H. STOLUM [1996], River meandering as a self-organisation process, *Science* **271**, 1710–1713.
11. E.C. TITCHMARSH [1962], *Eigenfunction Expansions Associated with Second-order Differential Equations* (2nd ed.), Oxford Univ. Press.

Een Hollandsche differentiaalvergelijking

Robbert Fokkink
Technische Universiteit Delft
Swier Garst
RSG Goeree Overflakkee

In 1901 zendt Guglielmo Marconi vanuit Cornwall een draadloos radiobericht over de oceaan naar Newfoundland, iets dat door velen tot dan toe voor onmogelijk werd gehouden. Het is het begin van een groot aantal lange afstand experimenten met radiogolven. Het blijkt dat de golven minder snel afnemen dan met de theoretische voorspelde wortel van de afstand. Is het buiging of is het iets anders? Verschillende wetenschappers, waaronder Hendrik Lorentz in Nederland, storten zich op het probleem. De juiste verklaring is, naar later bleek, de weerkaatsing door de ionosfeer en in het bijzonder de 'Heaviside-band'. Al in 1902 had Heaviside het bestaan van een reflecterende laag gesuggereerd als verklaring voor lange afstand transmissie van radiogolven, maar deze verklaring is nog niet gangbaar in 1917. In dat jaar gaat de net in Utrecht afgestudeerde natuurkundige Balthasar van der Pol naar het Cavendish laboratorium in Cambridge om te meten aan de voortplanting van radiogolven door een geïoniseerd gas. Hij blijft twee jaar in Cambridge en die twee jaar van experimenteren zijn de basis geworden voor al zijn verdere wetenschappelijk werk.

Van der Pol heeft naast experimentele bekwaamheid ook een uitgesproken theoretische belangstelling. Hij ziet een mogelijkheid om de invloed van de ionosfeer op radiogolven door te rekenen via een geschikte randvoorwaarde op de Maxwellvergelijkingen en legt dit voor aan de wiskundige George Neville Watson (1886–1965), een specialist in Besselfuncties. Watson slaagt waar Poincaré en Sommerfeld faalden en toont via Van der Pols randvoorwaarde aan dat radiogolven afnemen met de experimenteel gemeten derdemachtswortel van de afstand. Watsons werk is een tour-de-force in de perturbatierekening waarvoor hij later de Sylvestermedaille zal krijgen.



Figuur 1. Balthasar van der Pol (1889–1959) was het grootste deel van zijn leven werkzaam bij Philips Natlab. Vanaf 1937 was hij deeltijdhoogleraar in Delft.

Van der Pol voert zijn experimenten in Cambridge uit met een ‘triode’, een versterker die in 1906 is uitgevonden door de Amerikaan Lee de Forest. De triode heeft een opmerkelijke stabiele oscillatie en in één van zijn eerste publicaties [3] leidt Van der Pol een differentiaalvergelijking af¹ waarmee hij deze oscillatie kan verklaren. Deze vergelijking is als volgt:

$$x'' - \gamma(1 - x^2)x' + x = 0. \quad (1)$$

Tegenwoordig heet dit de Van der Pol vergelijking. Als x klein is, dan is de term x^2x' verwaarloosbaar en wordt de vergelijking lineair met negatieve demping: $x'' - \gamma x' + x = 0$. De evenwichtoplossing $x = 0$ is daarom onstabiel. Aan de andere kant wordt de demping positief voor grote x vanwege de term x^2x' . De negatieve demping bij kleine x en de positieve demping bij grote x duiden erop dat de Van der Pol vergelijking dwingt tot een periodieke trilling. Dit gaan we concreet maken.

¹ Opmerkelijk genoeg wordt in de literatuur niet altijd verwezen naar de publicatie uit 1920. Vaak wordt verwezen naar een publicatie van Van der Pol en Van der Mark in 1927. Weliswaar een buitengewoon interessante publicatie, maar de Van der Pol vergelijking komt er niet in voor. Alle genoemde publicaties van Van der Pol zijn overigens te vinden in zijn verzameld werk: *Selected scientific papers*, onder redactie van Bremmer en Bouwkamp, North Holland, 1960.

Voer in navolging van Liénard de variabele $y = (x - x^3/3) - x'/\gamma$ in. Dan wordt de Van der Pol vergelijking omschreven tot het stelsel

$$\begin{cases} x' &= \gamma(x - \frac{x^3}{3} - y) \\ y' &= \frac{x}{\gamma} \end{cases} \quad (2)$$

We analyseren deze vergelijking op de manier van Christopher Zeeman [6] en gaan de termen stukje bij beetje opbouwen. Daarbij concentreren we ons op het geval dat $\gamma \gg 1$, oftewel $1/\gamma \ll 1$. Een wiskundige noteert klein getallen als $1/\gamma$ natuurlijk liever met ε en deze notatie gebruiken we vanaf nu.

Beschouw eerst het eenvoudige stelsel

$$\begin{cases} x' &= -x/\varepsilon \\ y' &= -\varepsilon y \end{cases} \quad (3)$$

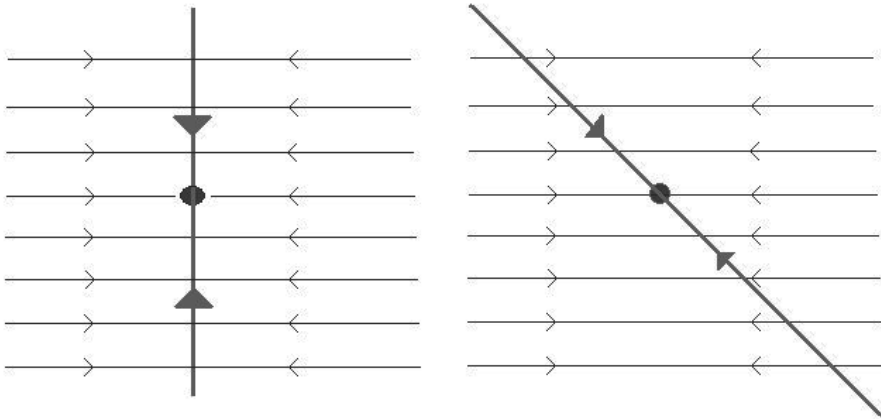
Dit is een ontkoppelde vergelijking: x en y nemen beide exponentieel af, maar x neemt veel sneller af dan y omdat $\varepsilon \ll 1$. Dit is grafisch weer te geven door de ontwikkeling van de oplossing (x, y) in de tijd te volgen in het xy -vlak, of liever gezegd, het *fasevlak*. Aangezien x veel sneller afneemt dan y valt het punt als het ware eerst naar de y -as waarlangs het vervolgens langzaam naar de oorsprong afglijdt. Zeeman noemt de y -as de *langzame variëteit* en noemt de horizontale lijnen de *snelle foliatie*. Denk aan de snelle foliatie als een storm en aan de langzame variëteit als een kleverige stok waar alle punten uit het fasevlak naartoe worden geblazen.

Pas de vergelijking een beetje aan en maak ervan

$$\begin{cases} x' &= -(x + y)/\varepsilon \\ y' &= -\varepsilon y \end{cases} \quad (4)$$

Deze vergelijking is in deze vorm niet meer ontkoppeld maar wel lineair en dus oplosbaar.² Nu is de afgeleide van x veel groter dan die van y indien $x + y$ ongelijk aan nul is. In het fasevlak vallen oplossingen snel langs de richting van de x -as naar de langzame variëteit $x + y = 0$, waarlangs ze vervolgens langzaam naar de oorsprong afglijden.

² Een kenner kan het stelsel ontkoppelen door de eigenvectoren te bepalen: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ met eigenwaarde $-1/\varepsilon$ en $\begin{bmatrix} 1/(1-\varepsilon) \\ -1 \end{bmatrix}$ met eigenwaarde $-\varepsilon$. De eerste eigenvector correspondeert met de snelle foliatie en de tweede correspondeert met de langzame variëteit. De langzame variëteit staat nagenoeg gericht langs de as $y = -x$, want we verwaarlozen ε .



Figuur 2. Fasevlakken bij (3) en (4).

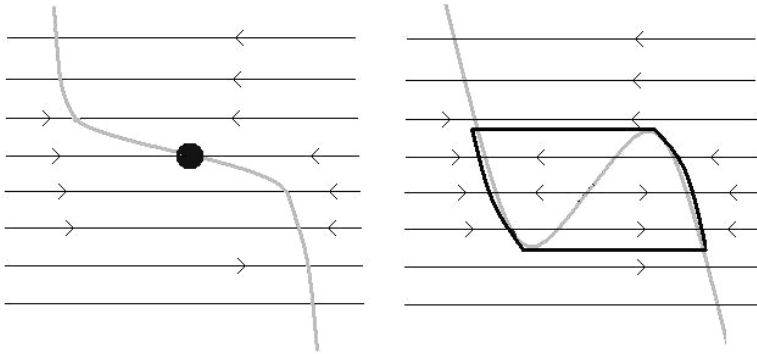
Merk nu op dat op de langzame variëteit van (4) geldt $y = -x$ dus er verandert niets op de langzame variëteit als we de vergelijking aanpassen tot

$$\begin{cases} x' &= -(x + y)/\varepsilon \\ y' &= \varepsilon x \end{cases} \quad (5)$$

Deze vergelijking is nog steeds lineair en eenvoudig oplosbaar, het is tijd voor de niet-lineaire termen.

$$\begin{cases} x' &= -(x + x^3/3 + y)/\varepsilon \\ y' &= \varepsilon x \end{cases} \quad (6)$$

De vergelijking is niet langer oplosbaar, maar in principe is er niet veel veranderd ten opzichte van (6). In het fasevlak vallen oplossingen in horizontale richting totdat ze de langzame variëteit $x + x^3/3 + y$ bereiken, waarna ze langzaam afglijden naar de oorsprong.



Figuur 3. Fasevlakken bij (6) en (7).

Algebraïsch is er weinig verschil tussen vergelijkingen (2) en (6); om precies te zijn een minteken. Toch verandert het gedrag van oplossingen in het fasevlak aanzienlijk als we vergelijking (6) omzetten in de Van der Pol vergelijking (waarbij in vergelijk met (2) er nu een ε staat i.p.v. $1/\gamma$):

$$\begin{cases} x' &= -(-x + x^3/3 + y)/\varepsilon \\ y' &= \varepsilon x \end{cases} \quad (7)$$

omdat de horizontale lijnen uit de snelle foliatie de langzame variëteit niet langer doorsnijden in één punt. De langzame variëteit $y = x - x^3/3$ doorsnijdt de x -as drie keer, heeft een lokaal maximum in $x = 1$ en een lokaal minimum in $x = -1$. Op de langzame variëteit glijden punten links van de y -as omhoog en kruipen punten rechts van de y -as omhoog. Neem een beginwaarde hoog in het eerste kwadrant van het fasevlak. De oplossing valt horizontaal naar de langzame variëteit en glijdt vervolgens langs de langzame variëteit naar beneden tot het lokaal minimum in $(-1, -2/3)$. Om de beweging verder te volgen, moeten we nu iets preciezer worden. De oplossing glijdt niet precies op de langzame variëteit, want dan zou de horizontale snelheid x' gelijk zijn aan nul. In werkelijkheid is de horizontale snelheid positief, dus $y < x - x^3$. Met andere woorden, de oplossing glijdt een fractie onder de langzame variëteit en tot een punt net onder $(-1, -2/3)$. Eenmaal daar aangekomen wordt het opgepakt door de snelle foliatie en geblazen naar een punt juist voorbij $(2, -2/3)$ waar het langzaam naar boven kruipt tot net boven het lokaal maximum $(1, 2/3)$.

Vanuit elke beginwaarde komt de oplossing van de Van der Pol vergelijking uiteindelijk in dezelfde periodieke beweging terecht. Een beweging die bestaat uit twee intervallen op de langzame variëteit en twee intervallen op de snelle foliatie. Van der Pol noemde zo'n beweging een *relaxatietrilling*³: x springt heen en weer tussen twee toestanden en moet zich voor elke sprong opnieuw 'opladen'.

Een hartklopping is ook een relaxatietrilling. Na elke hartslag onspannt de hartspier en stromen de hartkamers vol met bloed. Dan krijgt de hartzenuw een elektrische impuls en ontstaat trekt de hartspier samen voor de volgende hartslag. Het hart trilt echter niet tussen twee toestanden, zoals in de Van der Pol vergelijking, maar ontspant zich elke cyclus één keer en trekt zich één keer samen. Er is dus een differentiaalvergelijking nodig met een gecontroleerde relaxatietrilling die bestaat uit één interval op de langzame variëteit en één interval uit de snelle foliatie. Zeeman heeft zo'n differentiaalvergelijking gemaakt door een vrijheidsgraad toe te voegen aan de Van der Pol vergelijking

$$\begin{cases} x' &= -(zx + x^3/3 + y)/\varepsilon \\ y' &= -\varepsilon(z + 1) \\ z' &= -\varepsilon(x + z) \end{cases} \quad (8)$$

De langzame variëteit $zx + x^3/3 + y = 0$ is nu een oppervlak in \mathbb{R}^3 dat lijkt op een tafellaken met een vouw. Dit is als volgt in te zien. Voor een vaste $z > 0$ is de functie $y = -(zx + x^3/3)$ monotoon dalend. Bij $z = 0$ heeft de functie een buigpunt en als z verder afneemt $z < 0$ ontstaan er een lokaal maximum en een lokaal minimum. Door deze grafieken in gedachten te verbinden ontstaat het gevouwen tafellaken. Zeemans differentiaalvergelijking speelt zich grotendeels af op dit oppervlak. De beweging over de langzame variëteit, het tafellaken, is aangepast via de vergelijking

$$\begin{cases} y' &= -\varepsilon(z + 1) \\ z' &= -\varepsilon(x + z) \end{cases} \quad (9)$$

Een nijvere lezer kan nagaan dat deze vergelijking een spiraalbeweging geeft op het tafellaken, draaiend in de richting van $(1, 2/3, -1)$. Eenmaal daar aangekomen wordt de spiraalbeweging opgepakt door de snelle foliatie en van de vouw afgeblazen. De schrijvers zijn minder nijver dan de lezers en in plaats van dit zelf uit te rekenen, laten we de visualisatie aan de computer over ...

Vandaag de dag blijft het werk van Van der Pol actueel. Dat geldt niet alleen voor stelling XII uit zijn proefschrift:

Er is geen voldoende grond voor de bewering dat de winters warmer worden.

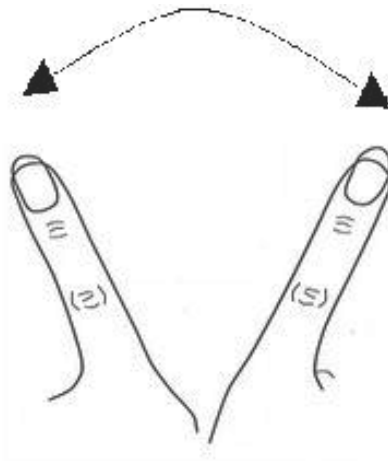
³ De term 'relaxatietrilling' is ingevoerd door Van der Pol in 1926 [4]. Lees vooral het commentaar van Adriaan van der Burgh bij dit artikel in het jubileumnummer van Nieuw Archief uit 1978: '1920-1940 two decades of mathematics in the Netherlands', uitgegeven door het Wiskundig Genootschap onder redactie van Bertin en Grootendorst.

Het geldt vooral voor zijn werk aan elektrische circuits. Van der Pol zou Van der Pol niet zijn geweest als hij zich niet had gerealiseerd dat er een elektrisch hartmodel was te bouwen met triodes. Hij maakt zo'n model rond 1927 met zijn medewerker Van der Mark en gaat ermee naar Parijs om het te demonstreren aan ingenieurs en medici. Het model bestaat uit gekoppelde Van der Pol oscillatoren en het lijkt veel op moderne hartmodellen, zoals bijvoorbeeld dat van Ermentrout en Kopell [1]. Karakteristiek aan een relaxatietrilling is, in de woorden van Van der Pol [5]:

Het gemak waarmee relaxatietrillingen synchronizeren met een externe periodieke beweging.

Het is een verassend moderne observatie, want sinds enkele jaren is synchronisatie van oscillatoren, kortweg *sync*, een intensief bestudeerd fenomeen in de biowetenschappen. Er is zelfs een populair wetenschappelijke boek over verschenen [7]. Synchronisatie van oscillatoren wordt bestudeerd door cardiologen, neurologen en bewegingswetenschappers, waaronder de Amsterdamse fysioloog Peter Beek.

De Ierse neuro-wetenschapper Scott Kelso bedacht in de jaren tachtig het volgende bewegingsexperiment: wijs recht vooruit met de rechterwijsvinger en ga deze langzaam ritmisch heen en weer bewegen. Doe hetzelfde met de linkerwijsvinger in een vergelijkbaar langzaam ritme, maar probeer dit onafhankelijk van de rechtervinger te doen. Verhoog nu het ritme van de beide vingers. Maak het ritme sneller en sneller en sneller.



Figuur 4. Kelso's vingerbeweging.

Drummers zijn in staat om de vingers onafhankelijk van elkaar te laten bewegen, tot aan het allerhoogste ritme. Bij gewone mensen gaan de vingers synchroniseren door eerst in tegenfase bewegen, maar als het ritme heel

hoog wordt, gaan de vingers opeens in fase bewegen. Deze beweging wordt beschreven door een stelsel van differentiaalvergelijkingen, dat het Haken-Kelso-Bunz model wordt genoemd [2]. Een enkele oscillerende vinger wordt daarin beschreven via

$$x'' - \gamma(1 - x^2)x' + \beta(x')^3 + \omega^2 x = 0. \quad (10)$$

Dit is een kleine aanpassing van vergelijking (1): de frequentie ω^2 is niet genormaliseerd en er is een extra term $(x')^3$ verschenen. Het karakter van de Van der Pol vergelijking is daarmee niet echt veranderd. Voor twee vingers wordt het stelsel

$$\begin{cases} x'' - \gamma(1 - x^2)x' + \beta(x')^3 + \omega^2 x &= f(x - y, x' - y') \\ y'' - \gamma(1 - y^2)y' + \beta(y')^3 + \omega^2 y &= f(y - x, y' - x') \end{cases} \quad (11)$$

waarbij de functie f een functie is die de ene beweging met de andere koppelt. Volgens neuro-wetenschappers maken de meeste mensen, drummers daargelaten, in hun hoofd zo'n koppeling tussen de beweging van hun vingers. In het Haken-Kelso-Bunz model is deze koppeling

$$f(w, w') = -w'(a - b(w')^2 - cw^2) \quad (12)$$

voor bepaalde constanten a, b, c . Het is natuurlijk onmogelijk om hier een volledige analyse van het model te geven. Gelukkig hebben we de zaal ter beschikking voor een wetenschappelijk vingerexperiment en kunnen we de computer gebruiken om de vergelijking te simuleren. De geïnteresseerde lezer kan meer vinden in [2].

Literatuur

1. G.B. ERMENTROUT, N. KOPELL, *Multiple pulse interactions and coupled neural oscillators*, J. Math. Biol. 29 (1991), 195–217. Besproken op http://www.scholarpedia.org/article/Pulse_Coupled_Oscillators.
2. T. LEISE, A. COHEN, *Nonlinear oscillators at our fingertips*, American Math. Monthly 114 no 1, (2007), 14–28.
3. B. VAN DER POL, *A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations*, The London Radio Review, (1920), 701–710 en 754–762.
4. B. VAN DER POL, *On relaxation oscillations*, Phil. Mag. 2 (1926), 978–992.
5. B. VAN DER POL, J. VAN DER MARK, *The heartbeat considered as a relaxation-oscillation, and an electrical model of the heart*, Arch. Neerl. Physiol. 14 (1929) 418–433, ook verschenen in het Frans in Onde Elect. 7 (1928), 365–392.
6. E.C. ZEEMAN, *Differential equations for the heartbeat and nerve impulse*, Dynamical systems (Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 1971), 683–741, Academic Press, New York, 1973.
7. S. STROGATZ, *Sync, the emerging science of spontaneous order*, Hyperion, 2003.

Differentiaalvergelijkingen, oscillaties en planeetbanen

Joost Hulshof
Vrije Universiteit Amsterdam

1. Inleiding

Nu differentiaalvergelijkingen terugkeren in de havo/vwo wiskunde is er alle reden om daar in de vakantiecursus aandacht aan te besteden. Differentiaalvergelijkingen beschrijven hoe toestanden van allerhande systemen veranderen, in de tijd of in de plaats. Een hangende kabel, een trillend membraan, stromingen in de lucht, een groeiende celwand, reagerende chemische stoffen, het zonnestelsel, etc. In alle exacte wetenschappen komen differentiaalvergelijkingen voor als wiskundige modellen van wat we zien in de wereld om ons heen, op kleine en op grote schaal.

De onbekende in een differentiaalvergelijking is niet een getal maar een functie. Een functie van de plaats, van de tijd, of van allebei. Ik beperk mij in dit verhaal tot differentiaalvergelijkingen waarin de onbekenden functies zijn van de tijd, van één reële variabele dus, die ik bij voorkeur t noem. Een triviaal voorbeeld van zo'n differentiaalvergelijking (DV) is

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = 0.$$

De onbekende functie is $x = x(t)$. Net als de meeste differentiaalvergelijkers gebruik ik de letter x hier op twee manieren: als afhankelijke variabele maar ook als functie. Wiskundig netter is een notatie $x = f(t)$ als vergelijking voor de grafiek van de functie f in het t, x -vlak, maar dat doet bijna niemand in dit deelgebied van de wiskunde.

De DV $x'(t) = 0$ zegt dat de onbekende functie $x = x(t)$ differentieerbaar moet zijn met afgeleide functie $x'(t)$ gelijk aan nul. De oplossingen van deze DV worden gegeven door

$$x(t) = C,$$

waarin C een willekeurige constante is. De DV heeft dus oneindig veel oplossingen. Om één oplossing te selecteren is een *beginconditie* nodig. Dat is een conditie die zegt wat de waarde van $x(t)$ is op een *begintijdstip*, bijvoorbeeld de beginconditie

$$x(0) = 1.$$

De vergelijking $x'(t) = 0$ met beginconditie $x(0) = 1$ heeft precies één oplossing, namelijk de oplossing $x(t) = 1$. Die oplossing is gedefinieerd voor alle t , dus zowel voor $t > 0$ als voor $t < 0$. De term beginconditie is strict genomen wat misleidend: we beginnen op $t = 0$ maar we gaan zowel voor als achteruit in de tijd. Achter de op het oog triviale conclusie dat het *beginwaardeprobleem* $x'(t) = 0, x(0) = 1$ precies één oplossing heeft, zit een wiskundige stelling, die in het eerste jaar van een studie wiskunde bij het vak Analyse bewezen wordt.

Stelling. Een differentieerbare functie, waarvan de afgeleide op een interval bestaat en gelijk is aan nul, is een constante functie op dat interval.

Het volgende voorbeeld is fundamenteel,

$$x'(t) = x(t),$$

de DV voor exponentiële groei. Ook deze DV heeft precies één oplossing die voldoet aan de beginconditie $x(0) = 1$, namelijk de functie

$$x(t) = \exp(t) = e^t.$$

Bij dit voorbeeld hebben we een ‘kip/ei’ situatie. Wat is er eerst, het *beginwaardeprobleem*

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t); \\ x(0) &= 1, \end{aligned}$$

of de functie $\exp(t)$ en het getal $e = \exp(1)$?

Een elegante manier om de functie \exp in te voeren is als de unieke oplossing van dit beginwaardeprobleem. *Daarna* kunnen we laten zien dat de functie \exp de multiplicatieve eigenschap heeft: voor alle reële t en s geldt

$$\exp(t + s) = \exp(t) \exp(s).$$

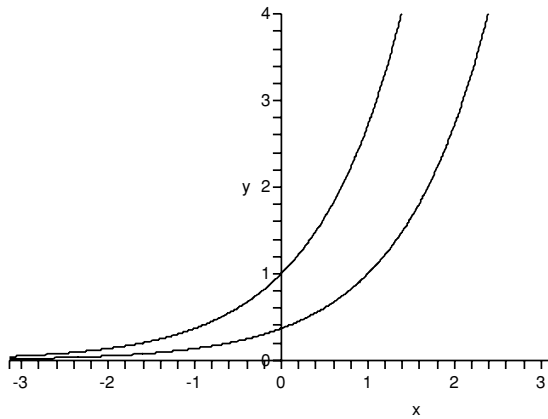
Als t van min naar plus oneindig (∞) loopt, dan loopt $\exp(t)$ (monotoon) van nul naar $+\infty$. Per definitie is $e = \exp(1)$. Eenvoudig na te gaan is dat $e^t = \exp(t)$ voor alle rationale t .

Voor de details verwijst ik naar het verhaaltje dat ik in Jan van Maanen’s minisymposium over ‘Echte Wiskunde’ (brrr) op 13 april in Leiden heb uitgedeeld, zie mijn home page. Hier wil ik benadrukken dat we twee ingrediënten nodig hebben voor het bewijs van de multiplicatieve eigenschap.

Globale existentie en uniciteit: Het beginwaardeprobleem

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t); \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

heeft voor elke reële t_0 en x_0 een unieke oplossing $x(t)$ die voor alle reële t gedefinieerd is.



Figuur 1. Een oplossing en een verschoven oplossing.

Schuiven en schalen: Als we de grafiek van een oplossing van $x'(t) = x(t)$ horizontaal schuiven of verticaal schalen, krijgen we weer de grafiek van een oplossing.

Het eerste is een *existentie-uniciteit stelling* die veel algemener geldt. Het tweede ingrediënt formuleert twee *invarianties* (ook wel *symmetrie eigenschappen*) van de vergelijking: omdat t niet apart in de DV voorkomt maakt het niet uit waar we op de t -as de nul kiezen (en dus kunnen we in een bewijs volstaan met $t_0 = 0$). Als we de grafiek van een oplossing in de t -richting heen en weer schuiven, dan krijgen we weer de grafiek van een oplossing. Dit heet *translatie-invariantie*, zie Figuur 1.

Veel specifieker voor de DV $x'(t) = x(t)$ is dat grafieken van oplossingen verticaal (in de x -richting) geschaald mogen worden. Als we x schalen dan komt de schaalfactor in alle termen van de DV naar voren en kan weggestreept worden. Evenzo is makkelijk na te gaan dat de som van twee oplossingen weer een oplossing is. De differentiaalvergelijking $x'(t) = x(t)$ heet daarom *lineair*. In het bijzonder zien we dat (met schaalfactor -1) de grafiek van een oplossing van een *lineaire* DV na *spiegeling* in de t -as weer een grafiek van een oplossing is.

Met deze ingrediënten kunnen we de belangrijkste eigenschappen van oplossingen afleiden zonder de DV op te lossen. Na de invoering van de functie \exp wordt de unieke oplossing van $x'(t) = x(t)$ met beginvoorwaarde $x(t_0) = x_0$ gegeven door

$$x(t) = x_0 \exp(t - t_0) = x_0 e^{t-t_0}.$$

Dat is de exponentiële functie waar we mee begonnen zijn, geschaald met een factor $x(t_0)$ en verschoven over t_0 .

Als we eenmaal de functie $e^t = \exp(t)$ tot onze beschikking hebben, ingevoerd als oplossing van een beginwaardeprobleem, of op een andere manier waaruit volgt dat $e^0 = 1$ en de afgeleide van e^t bestaat en gelijk is aan e^t zelf, dan kunnen we in principe alle DV's aan die van de vorm

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$$

zijn, met $a(t)$ en $b(t)$ continue functies op een gegeven interval. Dit is de algemene *eerste orde lineaire inhomogene differentiaalvergelijking*. Lineair vanwege de lineaire vorm waarin x en x' voorkomen, inhomogeen vanwege de term $b(t)$. Zonder $b(t)$ heet de vergelijking homogeen.

We gebruiken hiertoe de volgende wiskundige stelling.

Primitieve functies: Als $a(t)$ continu is op een interval dan heeft $a(t)$ op dat interval een primitieve functie $A(t)$, i.e. de functie $A(t)$ is op dat interval differentieerbaar en $A'(t) = a(t)$.

Voor een oplossing $x(t)$ van de lineaire inhomogene eerste orde DV geldt de volgende keten van equivalente DV's:

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \iff x'(t) - a(t)x(t) = b(t)$$

(vermenigvuldig met de positieve (!) 'integrerende' factor $e^{-A(t)}$)

$$\iff e^{-A(t)} (x'(t) - a(t)x(t)) = e^{-A(t)} b(t)$$

(gebruik de kettingregel en de produktregel)

$$\iff \left(e^{-A(t)} x(t) \right)' = e^{-A(t)} b(t)$$

Laat nu $F(t)$ een primitieve zijn van de functie aan de rechterkant van de laatste vergelijking. Dan volgt

$$e^{-A(t)} x(t) - F(t) = C,$$

met C een (nog onbekende) constante. De afgeleide van het linkerlid is immers nul.

Omschrijven geeft als algemene oplossing

$$x(t) = e^{A(t)} (C + F(t)),$$

waarin de keuze

$$C = e^{-A(t_0)} x_0 - F(t_0)$$

nodig en voldoende is om aan de beginwaarde $x(t_0) = x_0$ te voldoen, hetgeen dan geeft

$$x(t) = x_0 e^{A(t)-A(t_0)} + e^{A(t)} (F(t) - F(t_0)).$$

Met $a(t) = 1$ en $b(t) = 0$ reduceert dit tot de oplossing van $x'(t) = x(t)$ met $x(t_0) = x_0$ die we al hadden.

De afleiding hierboven geldt voor elke oplossing. In het bijzonder is existentie en uniciteit voor het beginwaardeprobleem teruggebracht tot de eerdergenoemde stelling over functies met afgeleide nul en het bestaan van een exponentiële functie.

De functie \exp wordt transcendent genoemd omdat we $\exp(t)$ niet met alleen maar algebraïsche manipulaties uit t kunnen destilleren. In Sectie 2 behandel ik de nauw met \exp verbonden transcendente functies \cos en \sin als oplossingen van de tweede orde DV $x''(t) = -x(t)$, de eenvoudigste DV die periodieke verschijnselen beschrijft.

Newton heeft de differentiaalrekening ontwikkeld om de door Kepler empirisch bepaalde wetten voor elliptische planeetbanen te verklaren. Die verklaring komt in Sectie 3 aan de orde als ik de bewegingsvergelijkingen voor een deeltje in een centraal krachtveld behandel. Maar daarvoor sta ik eerst nog even stil bij de vraag naar het bestaan van oplossingen in het algemeen.

In het algemeen zijn DV's bijna nooit exact oplosbaar, maar zijn er wel stellingen die zeggen dat oplossingen bestaan. Eigenschappen van oplossingen moeten dan uit de DV zelf worden afgeleid. Ook als er wel een exacte oplossing bestaat is het vaak inzichtelijker om de eigenschappen van die oplossing uit de DV zelf en niet uit de oplossingsformule te halen.

2. Oscillaties en cirkels

In de inleiding is de functie \exp geïntroduceerd als oplossing van een beginwaardeprobleem. Op dezelfde manier kunnen de functies \cos en \sin worden geïntroduceerd.

2.1. De slingervergelijking

De tweede orde DV

$$x''(t) = -x(t)$$

staat bekend als de *lineaire slingervergelijking* zonder wrijving. Voor elke t moet de tweede afgeleide $x''(t)$ bestaan en gelijk zijn aan $-x(t)$. Zien we $x(t)$ als de positie van een op een lijn bewegend punt, dan is $x'(t)$ de *snellheid* van dit punt en $x''(t)$ de *versnelling*. In de mechanica van Newton is de versnelling van een puntmassa gelijk aan het quotiënt van de kracht F die op de puntmassa werkt en de massa m van het punt. De slingervergelijking beschrijft dus de beweging van een puntmassa met massa 1 in een *krachtveld* gegeven door $F = -x$. Het krachtveld trekt de puntmassa terug naar het *evenwicht* $x = 0$, als gevolg waarvan $x(t)$ heen en weer slingert om $x = 0$. Daarbij is er een *behouden grootheid* want voor elke oplossing geldt

$$\left((x'(t))^2 + (x(t))^2 \right)' = 2x''(t)x'(t) + 2x(t)x'(t) = 0,$$

en dus is

$$(x'(t))^2 + (x(t))^2 = C,$$

waarin $C \geq 0$ een constante is die van de beginvoorwaarden afhangt. Deze behouden grootheid correspondeert met de wet van behoud van energie (de som van kinetische en potentiële energie) in conservatieve krachtvelden.

Globale existentie en uniciteit: Voor elke reële t_0, x_0, x_1 heeft het beginwaardeprobleem

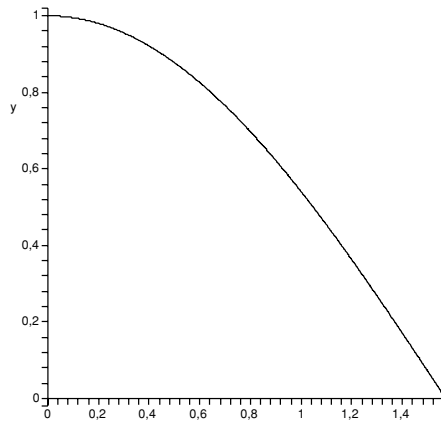
$$\begin{aligned} x''(t) &= -x(t); \\ x(t_0) &= x_0, x'(t_0) = x_1, \end{aligned}$$

een unieke oplossing $x(t)$ die gedefinieerd is voor alle reële t .

Omdat de vergelijking lineair is en een nogal bijzondere (som van kwadraten) behouden grootheid heeft, is uniciteit makkelijk in te zien: als we twee oplossingen hebben van het beginwaardeprobleem, dan is het verschil een oplossing met beginwaarde $x(t_0) = x'(t_0) = 0$, en heeft dus constante $C = 0$ voor zijn behouden grootheid. Beide kwadraten in de behouden grootheid zijn dus nul en de verschiloplossing kan alleen maar de nulfunctie zijn.

Een tweede orde DV heeft dus twee beginwaarden nodig om de oplossing uniek te bepalen: in mechanische termen een beginpositie en een beginsnelheid, in wiskundige termen, een beginwaarde voor de oplossing en een beginwaarde voor de afgeleide. De oplossing met $x(0) = 1$ en $x'(0) = 0$ (in de stelling $t_0 = 0, x_0 = 1, x_1 = 0$) noem ik $X(t)$. Wat kunnen we over deze oplossing zeggen?

- $X(t)$ heeft een maximum in $t = 0$ omdat $X''(0) = -X(0) = -1 < 0$. Laten we t vanaf $t = 0$ groter worden, dan is $X''(t) = -X(t) < 0$ en wordt daarmee $X'(t)$ negatiever zo lang $X(t)$ positief is. We concluderen dat $X(t)$ niet positief kan blijven. Het eerste positieve nulpunt van $X(t)$ noem ik T . Dus $X(T) = 0$ en $X'(t) < 0$ voor $0 < t \leq T$. Zie Figuur 2.
- De DV $x''(t) = -x(t)$ heeft nog een invariantie. Behalve dat t niet apart voorkomt, komt ook de eerste afgeleide $x'(t)$ niet voor in de DV. De DV bevat alleen afgeleiden van *even orde*. Hierdoor geeft spiegeling in de x -as van de grafiek van een oplossing weer de grafiek van een oplossing. In het bijzonder is de grafiek van de oplossing $X(t)$ na spiegeling in de x -as weer de grafiek van een oplossing met $x(0) = 1$ en $x'(0) = 0$. Vanwege de uniciteit stelling vallen de grafiek en zijn gespiegelde samen. De grafiek van $X(t)$ is dus symmetrisch in de x -as: $X(t) = X(-t)$, zie Figuur 3.
- Net als bij de DV $x'(t) = x(t)$ kunnen we oplossingen van DV $x''(t) = x(t)$ schuiven en verticaal schalen. Combineren we schuiven met spiegelen in de x -as, dan zien we dat we mogen spiegelen *in elke verticale lijn*. Dus ook in de lijn $t = T$. Combinatie van spiegeling in de lijn $t = T$ met spiegeling in de t -as geeft een *puntspiegeling* in het punt $(t, x) = (0, T)$. Omdat $X(T) = 0$ is ook de puntgespiegelde grafiek de grafiek van een oplossing die nul is in $t = T$, met (kijk naar de raaklijn) *dezelfde afgeleide*



Figuur 2. De grafiek van de oplossing $X(t)$ begint horizontaal in $(t, x) = (0, 1)$ en loopt daarna met toenemende steilheid naar beneden tot het snijpunt met de t -as in $(t, x) = (T, 0)$.

in $t = T$. Vanwege de uniciteit stelling vallen de grafiek van $X(t)$ en zijn puntgespiegelde samen en is de grafiek van $X(t)$ puntsymmetrisch in $(t, x) = (0, T)$, zie Figuur 3.

- Herhaling van de argumenten hierboven geeft voor de grafiek van $X(t)$ symmetrielijnen $t = 0, t = 2T, t = -2T, t = 4T, t = -4T, \dots$, en symmetriepunten $(x, t) = (0, -T), (x, t) = (0, 3T), (x, t) = (0, -3T), (x, t) = (0, 5T), \dots$. Daarmee wordt de oplossing $X(t)$ periodiek met periode $4T$. De oplossing $X(t)$ heeft nulpunten in $t = \pm T, t = \pm 3T, t = \pm 5T, \dots$, maxima in $t = 0, t = \pm 4T, t = \pm 8T, \dots$, minima in $t = \pm 2T, t = \pm 6T, \dots$

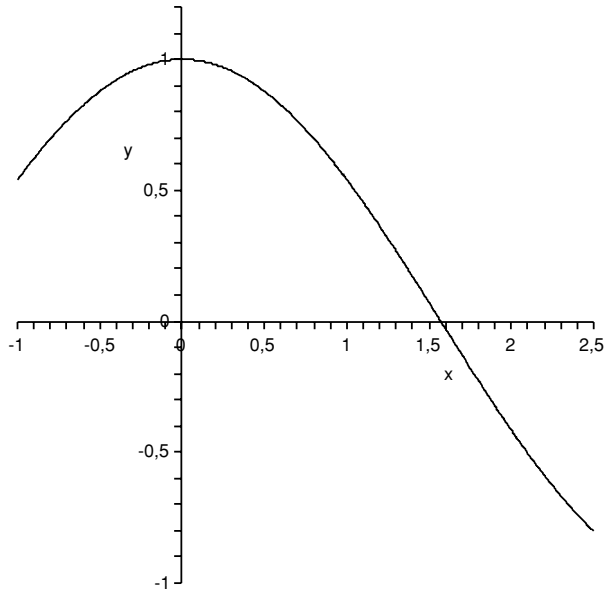
2.2. Het fasevlak

Van de tweede orde DV $x''(t) = -x(t)$ kunnen we een eerste orde stelsel maken door de afgeleide van de onbekende functie een nieuwe naam te geven, bijvoorbeeld $y(t) = -x'(t)$. De ‘min’ hier is niet helemaal gebruikelijk en is erbij gezet vanwege het specifieke voorbeeld en het verband met de goniometrische functies. De tweede orde DV $x''(t) = -x(t)$ wordt nu $y'(t) = -x''(t) = x(t)$ en is equivalent met een stelsel van twee gekoppelde differentiaalvergelijkingen voor $x(t)$ en $y(t)$:

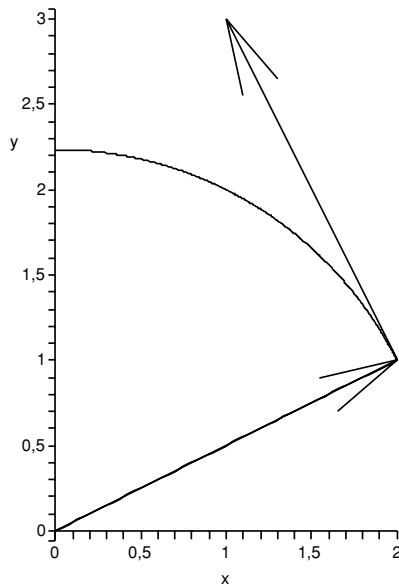
$$\begin{aligned} x' &= -y; \\ y' &= x. \end{aligned}$$

Ik laat vanaf nu in de notatie vaak de expliciete t -afhankelijkheid weg.

Oplossingen $(x(t), y(t))$ kunnen we zien als geparametriseerde krommen in het x, y -vlak, in deze context vaak het fasevlak genoemd. Anders gezegd, oplossingen zien we als bewegende punten in het vlak. Een beginpositie (twee beginwaarden) is nodig (en voldoende) om de oplossing uniek te bepalen:



Figuur 3. Symmetrie in x -as, puntsymmetrie in $(x, t) = (T, 0)$, periode $4T$.



Figuur 4. Positievector, snelheidsvector, oplossingskromme.

Globale existentie-uniciteit: Voor elke reële t_0, x_0, y_0 heeft het stelsel

$$\begin{aligned}x' &= -y; \\y' &= x\end{aligned}$$

een unieke en voor alle reële t gedefinieerde oplossing $(x(t), y(t))$ met $x(t_0) = x_0$ en $y(t_0) = y_0$.

De vector

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{pmatrix}$$

is de snelheidsvector van het bewegende punt $(x(t), y(t))$. Bij dit stelsel wordt de snelheidsvector verkregen door de positievector

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

tegen de klok in over 90 graden te draaien, zie Figuur 4. De behouden grootheid zien we nu uit

$$\frac{d}{dt}(x(t)^2 + y(t)^2) = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t)$$

$$-2x(t)y(t) + 2y(t)x(t) = 0.$$

Oplossingen bewegen dus over cirkels. De oplossing $x = X(t)$ uit Sectie 2.1 van de slingervergelijking $x'' = -x$ met begincondities $x(0) = 1, x'(0) = 0$ geeft zo, met $Y(t) = -X'(t)$, een

$$\text{parametrisatie } x = X(t), y = Y(t) \text{ van de cirkel } x^2 + y^2 = 1.$$

De snelheidsvector heeft constante lengte 1. Het punt $(X(t), Y(t))$ begint op $t = 0$ in $(x, y) = (1, 0)$ en loopt de cirkel precies één keer linksom rond als t van $t = 0$ naar $t = 4T$ loopt. Kortom,

$$X(t) = \cos t, \quad Y(t) = \sin t, \quad 4T = 2\pi,$$

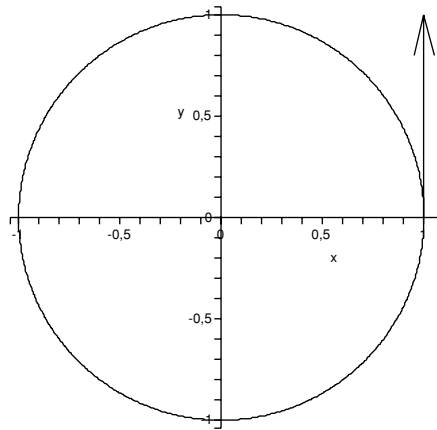
zie Figuur 5.

2.3. De 'multiplicatieve' eigenschap, complexe e -machten

De functies $X(t) = \cos t$ en $Y(t) = \sin t$ voldoen allebei aan de tweede orde DV $x'' = -x$. Begincondities zijn $X(0) = 1, X'(0) = 0$ voor $X(t)$ en $Y(0) = -X'(0) = 0, Y'(0) = -X''(0) = X(0) = 1$ voor $Y(t)$. Omdat de vergelijking $x'' = -x$ lineair is, wordt de oplossing met beginwaarde $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1$ gegeven door

$$x(t) = x_0 X(t - t_0) + x_1 Y(t - t_0).$$

De keuze $x_0 = X(t_0)$ en $x_1 = X'(t_0) = -Y(t_0)$ geeft vanwege de uniciteitstelling de oplossing $X(t)$ zelf en dus concluderen we dat



Figuur 5. $X(t) = \cos t$, $Y(t) = \sin t$, parametrisatie van de cirkel.

$$X(t) = X(t_0)X(t - t_0) - Y(t_0)Y(t - t_0),$$

en ook, na differentiatie naar t en vermenigvuldigen met -1 , dat

$$Y(t) = X(t_0)Y(t - t_0) + Y(t_0)X(t - t_0).$$

Dit zijn de somregels voor $X = \cos$ en $Y = \sin$. Differentiatie links en rechts naar t en vervolgens $t = t_0$ invullen geeft $X'(t_0)$ en $Y'(t_0)$ in termen van $X(t_0)$, $Y(t_0)$, $X'(0) = 0$ en $Y'(0) = 1$, waarmee het klokje rond is.

De afleiding hierboven is volstrekt analoog aan de afleiding dat

$$\exp(t) = \exp(t_0) \exp(t - t_0),$$

de multiplicatieve eigenschap van de functie \exp , die volgt uit de eigenschappen van oplossingen van $x' = x$.

Identificeren we het x, y -vlak \mathbb{R}^2 met \mathbb{C} via $z = x + iy$, waarbij

$$i^2 = -1,$$

dan voldoet $Z(t) = X(t) + iY(t) = \cos t + i \sin t$ aan

$$Z(t) = Z(t_0)Z(t - t_0),$$

omdat

$$X(t) + iY(t) =$$

$$X(t_0)X(t - t_0) - Y(t_0)Y(t - t_0) + i(X(t_0)Y(t - t_0) + Y(t_0)X(t - t_0))$$

$$= (X(t_0) + iY(t_0))(X(t - t_0) + iY(t - t_0)).$$

Verder geldt

$$Z'(t) = X'(t) + iY'(t) = -Y(t) + iX(t) = i(X(t) + iY(t)) = iZ(t),$$

en $Z(0) = 1$. Het ligt dus voor de hand om

$$Z(t) = \exp(it) = e^{it} = \cos t + i \sin t$$

als notatie in te voeren.

2.4. De existentie-uniciteit stelling

Bij iedere functie $f(x)$ van een variabele kunnen we een differentiaalvergelijking

$$x'(t) = f(x(t))$$

opschrijven. Wat kunnen we in het algemeen zeggen over het bestaan van oplossingen?

Lokale existentie: Als f continu is op een open interval J dat x_0 bevat, dan is er een open interval I dat t_0 bevat waarop de DV $x'(t) = f(x(t))$ tenminste één oplossing $x(t)$ heeft met $x(t_0) = x_0$.

Dit is echt een stelling, een bewijs is op school niet haalbaar, de formulering wel. Het bewijs is gebaseerd op integratie van de DV van t_0 tot t . Dat geeft, voor het gemak met t_0 ,

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s)) ds,$$

een integraalvergelijking die op diverse manieren kan worden aangepakt, bijvoorbeeld door iteratie, zie het verhaaltje uitgedeeld in Leiden.

Uniciteit: Als f ook voldoet aan

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \text{ blijft begrensd als } x_1 \neq x_2 \text{ door } J \text{ lopen,}$$

dan is er er een open interval I dat t_0 bevat waarop de DV $x'(t) = f(x(t))$ een *unieke* oplossing $x(t)$ heeft met $x(t_0) = x_0$.

In de praktijk: In het bijzonder is er lokale existentie en uniciteit als $f(x)$ een continue afgeleide heeft op een omgeving van x_0 .

Maximale existentie interval: Als de oplossing $x(t)$ niet voor alle $t > t_0$ bestaat dan is er een maximaal interval $[t_0, T)$ vooruit in de tijd waarop de oplossing bestaat. Als $t \rightarrow T$ geldt tenminste één van de volgende uitspraken

- $x(t)$ komt willekeurig dicht bij de rand van J .
- $x(t)$ is onbegrensd.

Een soortgelijke uitspraak geldt terug in de tijd voor $t < t_0$.

De volgende voorbeelden illustreren wat er mis kan gaan.

$$x' = x^2, \text{ beginwaarde } x(0) = 1, \text{ onbegrensde oplossing } x(t) = \frac{1}{1-t}.$$

$$x' = 2\sqrt{|x|}, x(0) = 0, \text{ oplossingen } x(t) = 0 \text{ en } x(t) = t^2 \text{ voor } t \geq 0.$$

Voor stelsels van de vorm

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y); \\ y' &= g(x, y), \end{aligned}$$

gelden soortgelijke stellingen.

Lokale existentie: Als f en g continu zijn op een rechthoek R die (x_0, y_0) bevat, (x_0, y_0) niet op de rand van R , dan is er een open interval I dat t_0 bevat waarop het stelsel tenminste één oplossing $(x(t), y(t))$ heeft met $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$.

Uniciteit: Als f voldoet aan

$$\frac{|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)|}{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|} \text{ blijft begrensd als } (x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \text{ in } R,$$

idem voor g , dan is er een open interval I dat t_0 bevat waarop de oplossing met $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$ *uniek* is.

In de praktijk: Als $f(x, y)$ en $g(x, y)$ op een omgeving van (x_0, y_0) gemaakt zijn door 'gewone' continue differentieerbare functies van één variabele te combineren via optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen (niet door nul) en samenstellen, dan is er lokale existentie en uniciteit van de oplossing met (x_0, y_0) als beginvoorwaarde op $t = t_0$.

Door het punt (x_0, y_0) gaat er dan precies één oplossingskromme, tenzij $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$. In dat geval is de oplossing constant gelijk aan (x_0, y_0) en kunnen we niet echt over een kromme spreken.

Deze uitspraak is ook makkelijk uit breiden tot stelsels van meer vergelijkingen.

Maximale existentie interval: Als de oplossing niet voor alle $t > t_0$ bestaat dan is er een maximaal interval $[t_0, T)$ vooruit in de tijd waarop de oplossing bestaat. Als $t \rightarrow T$ geldt tenminste één van de volgende uitspraken

- $(x(t), y(t))$ komt willekeurig dicht bij de rand van R .
- $(x(t), y(t))$ is onbegrensd.

Een soortgelijke uitspraak geldt terug in de tijd voor $t < t_0$.

NB: Overall waar hierboven over een rechthoek gesproken wordt mag men ook een willekeurige deelverzameling van R van \mathbb{R}^2 nemen met $(x_0, y_0) \in R$, (x_0, y_0) niet op de rand van R , maar de definitie van rand van R blijft hier achterwege.

Toegestaan in de praktijk zijn bijvoorbeeld

$$f(x, y) = e^{\sin(x^2+y^2)+\cos y} + \frac{y}{1+x^2}, \quad g(x, y) = \ln(1+x^2+y^2),$$

voor elke (x_0, y_0) , maar niet (althans niet meteen voor alle (x_0, y_0))

$$f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2) + \cos y} + \frac{y^2}{1 + x^2}, \quad g(x, y) = e^{x + \cos y}.$$

3. Newton en Kepler

De slingervergelijking $x'' = -x$ beschreef de beweging van een puntmassa met massa 1 op een lijn onder de invloed van een krachtveld gegeven door $F = -x$. In deze sectie kijken we naar de differentiaalvergelijking (bewegingsvergelijking) voor zo'n puntmassa bewegend in de x, y, z -ruimte in een centraal krachtveld F . Het directe analogon zou zijn

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

maar dat geeft drie ontkoppelde gewone slingervergelijkingen voor $x(t)$, $y(t)$ en $z(t)$. In plaats daarvan kijken we naar een krachtveld dat naar binnen gericht is en dat kwadratisch afvalt met de afstand r tot de oorsprong, dus

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \\ \frac{d^2z}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = - \frac{A}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Deze F heeft als som van de kwadraten van zijn componenten precies A gedeeld door $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Denk hierbij aan een universum met de zon vastgeprikt (in de oorsprong) en een planeet die als puntmassa beweegt onder invloed van de aantrekkingskracht van (alleen) de zon.

De positieve constante A kan ik, door tijd of plaats te schalen, gelijk aan 1 kiezen. Schalingsinvarianties zijn makkelijker te zien met de differentiaalquotientnotatie voor de afgeleiden, al zijn die wat moeilijk in de vector te proppen. Als we t met een factor C^3 schalen en x, y, z met een factor C^2 , dan blijft A hetzelfde. (Welke conclusie is hieruit te trekken?)

Van de drie gekoppelde tweede orde DV's is een stelsel van zes gekoppelde eerste orde DV's te maken,

$$\begin{aligned} x' &= -u; \\ u' &= Ax(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}; \\ y' &= -v; \\ v' &= Ay(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}; \\ z' &= -w; \\ w' &= Az(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Met begincondities

$$x(0) = x_0, u(0) = u_0, y(0) = y_0, v(0) = v_0, z(0) = z_0, w(0) = w_0,$$

heeft dit stelsel een unieke lokale oplossing, tenzij $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, zie ook de discussie over stelsels in Sectie 2.4. Als $(x(t), u(t), y(t), v(t), z(t), w(t))$ een oplossing is, dan is ook $(x(t), u(t), y(t), v(t), -z(t), -w(t))$ een oplossing.

Op grond van de lokale uniciteit van oplossingen moet een oplossing waarvoor $z(0) = w(0) = 0$ voor alle t waarvoor de oplossing bestaat ook voldoen aan $z(t) = w(t) = 0$. Anders zouden we een tweede oplossing kunnen maken door $z(t)$ en $w(t)$ een min te geven. We concluderen dat als de beginpositie en de beginsnelheid geen verticale component hebben ($z(0) = 0, w(0) = -z'(0) = 0$), de baan van de puntmassa in het x, y -vlak ligt.

Met poolcoördinaten r en φ schrijven we

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = x + iy = r e^{i\varphi},$$

waarbij we de complexe notatie gaan gebruiken. Voor $r = r(t)$ en $\varphi = \varphi(t)$ als de onbekende functies van t worden de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r(t) \cos \varphi(t))'' \\ (r(t) \sin \varphi(t))'' \end{pmatrix} = -\frac{A}{r(t)^2} \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix},$$

of, in complexe notatie,

$$(r(t)e^{i\varphi(t)})'' = -\frac{A}{r(t)^2} e^{i\varphi(t)}.$$

We gaan nu het linkerlid met behulp van de produktregel en de kettingregel voor differentiëren uitwerken. We laten hierbij de variabele t weg uit de formules. De eerste afgeleide is

$$(re^{i\varphi})' = r'e^{i\varphi} + r(e^{i\varphi})' = r'e^{i\varphi} + rie^{i\varphi}\varphi'.$$

De tweede afgeleide is

$$\begin{aligned} (re^{i\varphi})'' &= (r'e^{i\varphi})' + (rie^{i\varphi}\varphi')' = \\ r''e^{i\varphi} + r'(e^{i\varphi})' + r'ie^{i\varphi}\varphi' + ri(e^{i\varphi})'\varphi' + rie^{i\varphi}\varphi'' &= \\ r''e^{i\varphi} + r'ie^{i\varphi}\varphi' + r'ie^{i\varphi}\varphi' + ri^2e^{i\varphi}\varphi'\varphi' + rie^{i\varphi}\varphi'' &= \\ e^{i\varphi}(r'' + 2ir'\varphi' - r(\varphi')^2 + ir\varphi'') &. \end{aligned}$$

Invullen in de complexe bewegingsvergelijking geeft

$$e^{i\varphi}(r'' + 2ir'\varphi' - r(\varphi')^2 + ir\varphi'') = -\frac{A}{r^2} e^{i\varphi}.$$

We delen nu door $e^{i\varphi}$. Dan

$$r'' + 2ir'\varphi' - r(\varphi')^2 + ir\varphi'' = -\frac{A}{r^2},$$

ofwel

$$r'' - r(\varphi')^2 + \frac{A}{r^2} + i(2r'\varphi' + r\varphi'') = 0 = 0 + 0i.$$

Reële en imaginaire delen links en rechts gelijkstellend vinden we nu het stelsel

$$\begin{aligned} r'' - r(\varphi')^2 + \frac{A}{r^2} &= 0; \\ 2r'\varphi' + r\varphi'' &= 0. \end{aligned}$$

De i is verdwenen en vanaf hier rekenen we weer reëel.

De laatste vergelijking kan, na vermenigvuldigen met r , geschreven worden als

$$(r^2\varphi')' = 0,$$

dus

$$r^2\varphi' = B = \text{constant}.$$

Dit is de perkenwet van Kepler die zegt dat het verbindende lijnstuk tussen de oorsprong en het bewegende punt in gelijke tijdsintervallen gelijke oppervlakten doorloopt. Als deze constante nul is dan vliegt het punt recht naar de oorsprong toe of recht van de oorsprong af, met alle vervelende gevolgen vandien.

We kunnen nu

$$\varphi' = \frac{B}{r^2}$$

invullen in de eerste vergelijking van het stelsel voor r en ϕ . Dat geeft

$$r'' = \frac{B^2}{r^3} - \frac{A}{r^2}.$$

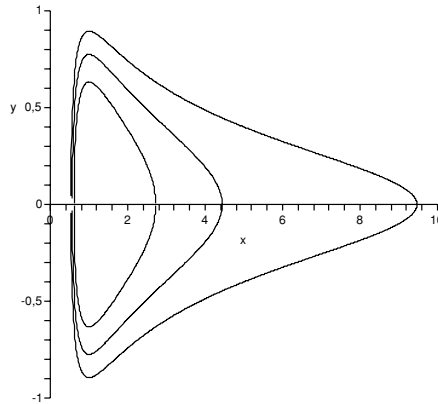
Het is zo net alsof we een 1-dimensionale beweging hebben in een krachtveld gegeven door het rechterlid.

Essentieel is hier dat de exponent 2 kleiner is dan 3. Dat heeft tot gevolg dat de 'kracht'

$$F = \frac{B^2}{r^3} - \frac{A}{r^2}$$

voor r groot negatief is en het punt dus naar binnen getrokken wordt (de kwadratische term overheerst), terwijl voor r dicht bij nul F positief is en het punt naar buiten geduwd wordt (de kubische term overheerst). Daartussen zit een evenwicht waar de oplossing omheen slingert, met, gelukkig, $r(t) > 0$ voor alle t , zoals we nog zullen zien.

De A/r^2 in de formule staat nog steeds voor de grootte van het oorspronkelijke krachtveld. Fysisch gezien is deze omgekeerd evenredig met r^2 omdat de (zwaarte)kracht zich moet verdelen over de oppervlakte van een bol met straal r . De exponent 2 is gelijk aan $3 - 1$, waarbij 3 de dimensie van onze ruimte is. In een 4-dimensionale ruimte zou de 2 dus een 3 worden en in een N -dimensionale ruimte een $N - 1$. Voor de DV



Figuur 6. In het r, r' -vlak beweegt de oplossing zich over een gesloten kromme waarlangs $r(t) > 0$, $A = B = 1$.

$$r'' = \frac{B^2}{r^3} - \frac{A}{r^{N-1}}$$

gaat de geruststellende analyse hierboven alleen door als $N < 4$. Voor $N > 4$ is het juist de afstotende 'kracht' die ver weg, en de aantrekkende 'kracht' die dicht bij overheerst. Evenwicht is dan ver te zoeken. Ook met $N = 4$ gaat het mis. Stabiele banen zijn alleen maar mogelijk voor dimensie N ten hoogste 3.

In de rest van het verhaal neem ik $B > 0$. Vermenigvuldigen van de r -vergelijking (met $N = 3$) met r' geeft, als we alles weer naar een kant brengen,

$$r' r'' - \frac{B^2 r'}{r^3} + \frac{A r'}{r^2} = 0,$$

ofwel

$$\frac{(r')^2}{2} + \frac{B^2}{2r^2} - \frac{A}{r} = \text{constant},$$

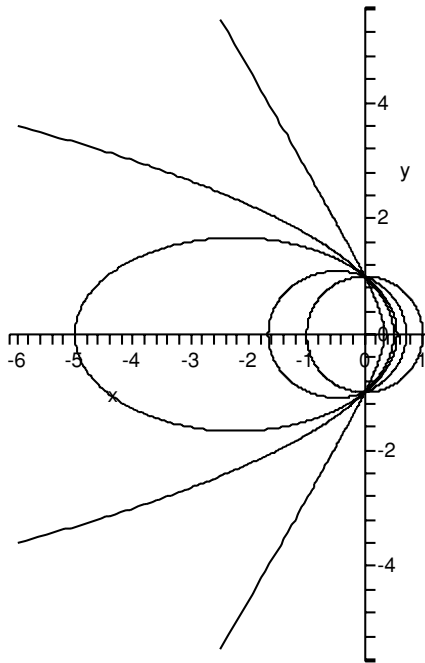
een behouden grootheid, net als bij de slingervergelijking, zie Figuur 6.

We kunnen hieruit verder redeneren en concluderen dat $r(t)$ een positieve periodieke functie is. Dat in één periode de hoek $\varphi(t)$ precies 2π toeneemt, m.a.w. dat de baan gesloten is, is minder evident en eigenlijk het gevolg van een klein wondertje.

Het wondertje openbaart zich als we als nieuwe *onafhankelijke* variabele φ (i.p.v. t), en als nieuwe *afhankelijke* variabele $w = \frac{1}{r}$ nemen. We krijgen dan, met de kettingregel, en ook omdat

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{B}{r^2} = Bw^2,$$

dat



Figuur 7. Oplossingen $r(1 + \varepsilon \cos \varphi) = 1$, $\varepsilon = 0, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1, 2$.

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{w} = -\frac{1}{w^2} \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{w^2} \frac{dw}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{w^2} \frac{dw}{d\varphi} Bw^2 = -B \frac{dw}{d\varphi},$$

en

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{dw}{d\varphi} \right) = -B \frac{d^2w}{d\varphi^2} \frac{d\varphi}{dt} = -B \frac{d^2w}{d\varphi^2} w^2,$$

zodat de vergelijking voor $r(t)$ (met N) overgaat in de vergelijking

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2} + w = \frac{A}{B^2} w^{N-3}$$

voor $w(\varphi)$.

Het wonder is de $w^0 = 1$ in het rechterlid als $N = 3$. We krijgen dan een lineaire inhomogene tweede orde DV voor $w(\varphi)$ die exact oplosbaar is. Het lijkt wel een tentamensom die zo voorbereid is dat het antwoord goed uitkomt. De w -vergelijking heeft een (hele) bijzondere oplossing, namelijk

$$w(\varphi) = \frac{A}{B^2}.$$

Omdat, zoals we gezien hebben, de ‘homogene’ vergelijking

$$\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w = 0$$

als algemene oplossing $w(\varphi) = a \cos \varphi + b \sin \varphi$ heeft, met a en b vrije constanten, is de algemene oplossing van de 'inhomogene' w -vergelijking te schrijven als

$$w(\varphi) = \frac{A}{B^2} + a \cos \varphi + b \sin \varphi.$$

Na een geschikte draaiing van ons coördinatenstelsel kunnen we de baan beschrijven als

$$r = r(\varphi) = \frac{R}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad R = \frac{B^2}{A}$$

met $\varepsilon \geq 0$ en φ_0 vrije constanten. Dit is de formule voor een kegelsnede met brandpunt in de oorsprong: $\varepsilon = 0$ geeft een cirkel, $0 < \varepsilon < 1$ een ellips, $\varepsilon = 1$ een parabool en $\varepsilon > 1$ een (tak van een) hyperbool, zie Figuur 7.

Wie dat niet meteen ziet is in goed gezelschap, zie Arthur Koestler's boek 'The Sleepwalkers'. We schrijven de formule voor r als $R = r + r\varepsilon \cos \varphi = r + \varepsilon x$, dus $r = R - \varepsilon x$, zo dat, na kwadrateren en sorteren,

$$(1 - \varepsilon^2)x^2 + 2\varepsilon R x + y^2 = R^2.$$

Voor $\varepsilon^2 < 1$ inderdaad een ellips, met kleinste en grootste diameter gelijk aan

$$2R, \quad \frac{2R}{1 - \varepsilon^2}, \quad \text{en oppervlakte } O = \frac{\pi R^2}{1 - \varepsilon^2}.$$

Die oppervlakte is ook gelijk aan

$$O = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r(\varphi)^2 d\varphi =$$

(substitueer $\varphi = \varphi(t)$ en gebruik de perkenwet)

$$\int_0^T \frac{1}{2} r(\varphi(t))^2 \varphi'(t) dt = \int_0^T \frac{1}{2} B dt = \frac{BT}{2},$$

waarin T de omlooptijd is. Samenvattend hebben we voor R en T

$$R = \frac{B^2}{A}, \quad T = \frac{2\pi}{1 - \varepsilon^2} \frac{B^3}{A^2}.$$

Hier is A de constante in de bewegingsvergelijking waar we mee zijn begonnen. De constante B was een vrije constante in de oplossing. We zien dus dat de derde macht van R en de tweede macht van T aan elkaar gekoppeld zijn via ε , de *excentriciteit* van de ellips.

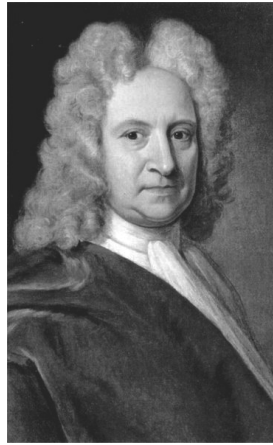
Dubbelplaneten

Rainer Kaenders
Radboud Universiteit Nijmegen

In 1695 heeft de Engelse astronoom Edmond Halley voorspeld dat de maanden (d.w.z. de omlooptijd van de maan rond de aarde) in de loop van de 600 jaar vóór zijn tijd ongeveer een tienduizendste uur korter zijn geworden [2]. Hoe kon hij met de middelen van toen een dergelijke uitspraak doen?

Twee jaar eerder, in 1693, heeft Halley samen met een Oxfordse arabist de vertaling (door een zekere Plato Tiburtinus) van de observaties van de astronoom al-Battani vanuit een vakdeskundig perspectief herzien [1]. De Arabier al-Battani (850 – 923), wiens naam door Halley tot *Albategnius* werd gelatiniseerd, beschreef verschillende maans- en zonsverduisteringen. Naar aanleiding hiervan beweerde Halley [2] dat hij aan kon tonen dat de maanden korter werden. De Utrechtse astronoom Frank Verbunt speculeert in [4], [6] hoe Halley tot deze conclusie gekomen zou kunnen zijn: Omdat zonsverduisteringen uitsluitend bij een nieuwe maan plaatsvinden moet er altijd een geheel aantal maanden tussen twee zonsverduisteringen zitten. Halley kende de lengte van een maand al enigszins nauwkeurig en kon dus terugrekenen wanneer en waar 800 jaar (oftewel ongeveer 10.000 maanden) eerder al-Battani een zonsverduistering gezien zou kunnen hebben. Stel nou dat Halley had berekend dat er toen een zonsverduistering in Alexandrië plaats moest hebben gevonden terwijl al-Battani een zonsverduistering op deze dag in Bagdad verslaat. Dit had Halley dan kunnen verklaren door aan te nemen dat de zonsverduistering een uur eerder plaatsvond dan hij had berekend, hetgeen betekent dat de doorsnee maandlengte tijdens deze 800 jaar met 10^{-4} uur langer was dan in zijn tijd. De derde wet van Kepler die we later nog zullen leren kennen, legt een verband tussen de omlooptijd en de afstand tussen aarde en maan en heeft tot gevolg dat met de lengte van de maanden ook de afstand tussen aarde en maan af moet nemen. Tegenwoordig weten wij echter door middel van lasermetingen aan de planeet Mars dat deze afstand tussen aarde en maan met 3,82 cm per jaar toeneemt en daarmee de maanden langer zouden moeten worden. Hoe is dit te verklaren? Had Halley gewoon ongelijk?

Deze vraag van Halley is een vraag zoals die werkelijk in de wetenschap, of preciezer in de astrofysica speelt. De vraag oefent een fascinerende werking uit op astronomen maar ook op leerlingen, leraren en andere belangstellenden. Ook al spreken de metingen Halley tegen, toch is de vraag: Op grond waarvan heeft Halley zijn conclusie getrokken? Het antwoord is te vinden in de analyse van het achterliggende wiskundige model. Aarde en maan vormen een zogenaamde dubbelplaneet en dubbelplaneten zijn weer draaiende systemen die onderhevig zijn aan de wet van behoud van impulsmoment (of



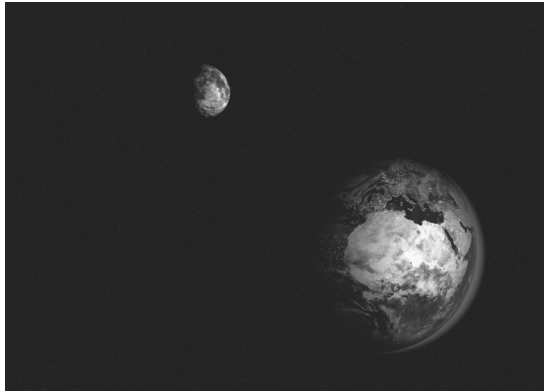
Figuur 1. Edmond Halley (1656–1742).

draai-impuls). Dit is de natuurkundige notie om de *hoeveelheid draaiing* van een systeem te kwantificeren. Door een zorgvuldige analyse van deze wet voor aarde-maan is de constatering van Halley logisch te verklaren [4], [5], [6]. Naast de toename van de maandlengte heeft het behoud van impulsmoment namelijk ook een sterkere toename van de daglengte tot gevolg. Als de maanden in dagen worden gemeten dan worden zij daadwerkelijk korter en had Halley dus toch gelijk.

Uiteindelijk kan door toepassing van de wet van behoud van impulsmoment de toekomst van de dubbelplaneten aarde-maan, Mars-Phobos en Neptunus-Triton worden voorspeld. Voor alle drie de dubbelplaneten geldt dezelfde wet maar toch gaat elk van hen een ander noodlot tegemoet.

In deze bijdrage zullen we de wiskundige achtergronden belichten van begrippen als koppel en impulsmoment en daarmee de wet van behoud van impulsmoment afleiden. De wetten van Newton worden toegelicht en vormen de enige inbreng vanuit de natuurkunde – de rest is wiskunde. Vectorfuncties, d.w.z. functies van \mathbb{R} naar \mathbb{R}^3 , worden ingevoerd en de productregel voor in- en uitproducten van zulke vectorfuncties afgeleid. Daarmee ligt de wet van behoud van impulsmoment al voor het oprapen. In het vervolg gaan we deze wet interpreteren. Daarvoor kijken wij naar zwaartepunten, hoeksnelheden, middelpuntzoekende krachten en traagheidsmomenten. Als loon voor deze moeite zullen we zien dat planeten in een vlak bewegen, de perkenwet van Kepler geldt en kunnen we het gyroscopisch effect begrijpen.

De studie van het impulsmoment in ons zonnestelsel en in het bijzonder het antwoord op het probleem van Halley vormen een schoolvoorbeeld voor de kracht van wiskunde in de natuurwetenschap. De observaties leveren een tegenspraak op, die alleen op te lossen is door een gepast wiskundig model dat in dit geval door de klassieke mechanica van Newton is gegeven. Met dit model wordt vervolgens puur wiskundig geredeneerd en dat levert uiteinde-



Figuur 2. De dubbelplaneet aarde-maan. Zie pagina 137 voor een kleurenillustratie.

lijk resultaten op die naar de werkelijkheid terug kunnen worden vertaald. Daarmee zijn dan de paradoxaal lijkende observaties te verklaren. Zodra het probleem van Halley is doorgrond wordt duidelijk dat dit model veel meer dan een enkele vraag op kan lossen – het maakt voorspellingen in uiteenlopende situaties mogelijk: de ene formule over behoud van impulsmoment levert uiteenlopende voorspellingen op in de drie gevallen aarde-maan, Mars-Phobos en Neptunus-Triton. Het probleem van Halley is een vraag die leerlingen toegang zou kunnen verlenen tot het cultuurgebied van wetenschap die berust op wis- en natuurkunde. Bijvoorbeeld het schoolboek [3] is een aanrader voor iedereen die op schoolniveau verder wil lezen over hemelmechanica en ruimtevaart.

Deze bijdrage komt voort uit de samenwerking van het *Regionale Steunpunt Wiskunde D* in Nijmegen met Jan Kuijpers, hoogleraar astrofysica en decaan aan de Radboud Universiteit, en een kerngroep van negen wiskundedocenten: Mark van den Aarssen, Hanneke Abbenhuis, Herman Alink, Leon van den Broek, Bart Jordens, Maris van Haandel, Dolf van den Hombergh, Richard Klein Breteler en Jos Winkel. Ook op de universiteiten van Delft, Eindhoven en Twente is voor een soortgelijke aanpak gekozen (zie [7]). Inmiddels is er lesmateriaal in eerste versie geproduceerd, dat beschikbaar wordt gesteld aan scholen en docenten die het domein *Wiskunde in Wetenschap* van wiskunde D in het zogenaamde samenwerkingsmodel aan gaan bieden (zie [8]). Het project en dit artikel zouden niet tot stand zijn gekomen zonder de zeer inspirerende bijdragen van Jan Kuijpers die ook het onderwerp naar aanleiding van [4], [5] en [6] in de samenwerking heeft aangedragen. Wij zijn hem hiervoor veel dank verschuldigd. Ten slotte geldt mijn dank Edith Verbeet, secretaresse op de Nijmeegse universitaire lerarenopleiding, die mij – zoals zo vaak in de afgelopen jaren – heeft geholpen mijn Nederlands op dat van een Nederlander te laten lijken.

1. Het wiskundig gereedschap

De wiskunde die nodig is om dit hoofdstuk uit het boek van de astronomie te begrijpen is wat elementaire lineaire algebra en de notie van geparametriseerde krommen in het vlak en de ruimte en haar afgeleiden.

1.1. In's en out's van producten in \mathbb{R}^3

We beginnen met een herinnering aan in- en uitproducten in \mathbb{R}^3 . De symbolen \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} en \vec{e} , met of zonder indices, staan in deze paragraaf voor vectoren in \mathbb{R}^3 .

Inproduct

Het *in(wendig)product* van twee vectoren

$\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ en $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ uit \mathbb{R}^3 is gedefinieerd als

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Wij spreken het inproduct uit als ' \vec{u} in \vec{v} ' en het is een voorschrift om uit twee vectoren een reëel getal te berekenen. Eenvoudig na te gaan is dat het inproduct symmetrisch (d.w.z. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$) en in beide argumenten lineair is – dit noem je dan bilineair. Wij noemen $|\vec{u}| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$ de *norm van een vector* \vec{u} uit \mathbb{R}^3 en met de stelling van Pythagoras ziet men dat de waarde van de norm gelijk is aan de lengte van de vector \vec{u} . Als wij het pijltje $\vec{}$ van een vector \vec{u} weglaten dan bedoelen wij de absolute waarde $u = |\vec{u}|$ van deze vector.

Het inproduct is zeer geschikt om de projectie van een vector \vec{u} op een vector \vec{v} te berekenen. Er bestaat een op \vec{v} loodrechte vector van de vorm $\vec{u} - \lambda \vec{v}$. Het getal λ bepaal je door te eisen dat deze vector loodrecht staat op \vec{v} . Met het inproduct betekent dit

$$\langle \vec{u} - \lambda \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{v}|^2}.$$

De *projectievector* en de *loodvector* van een vector \vec{u} op een vector \vec{v} worden gegeven door

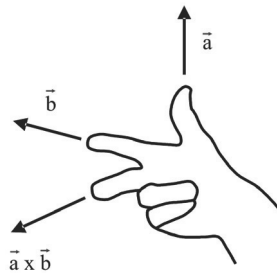
$$\vec{u}_{\vec{v}} := \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{v}|^2} \vec{v} \quad \text{en} \quad \vec{u}_{\vec{v}^\perp} := \vec{u} - \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{v}|^2} \vec{v}.$$

Projectie- en loodvector geven aanleiding tot een ontbinding $\vec{u} = \vec{u}_{\vec{v}} + \vec{u}_{\vec{v}^\perp}$ van de vector \vec{u} in een vector in de richting van \vec{v} en een vector die loodrecht op \vec{v} staat.

Opgave:

- (i) Bewijs dat geldt $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}_{\vec{u}} \rangle = \langle \vec{u}_{\vec{v}}, \vec{v} \rangle$.
- (ii) De vectoren \vec{u} en \vec{v} spannen een parallellogram op. Laat zien dat de oppervlakte daarvan gelijk is aan

$$|\vec{u}_{\vec{v}^\perp}| |\vec{v}| = |\vec{v}_{\vec{u}^\perp}| |\vec{u}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2}.$$



Figuur 3. De vectoren \vec{a} , \vec{b} en $\vec{a} \times \vec{b}$ vormen een zogenaamd rechtshandig assenstelsel.

Uitproduct

In de natuurkunde en de techniek kom je vaak situaties tegen waar grootheden loodrecht op elkaar staan.

Wij zoeken dus een manier om aan twee vectoren \vec{u} en \vec{v} in \mathbb{R}^3 een derde vector $\vec{u} \times \vec{v}$ uit \mathbb{R}^3 toe te kennen zodat geldt als $\vec{u} \neq 0$ en $\vec{v} \neq 0$:

- (i) $\vec{u} \times \vec{v}$ staat loodrecht op \vec{u} en \vec{v} ,
- (ii) \vec{u} , \vec{v} en $\vec{u} \times \vec{v}$ vormen een rechtshandig assenstelsel (zie Figuur 3),
- (iii) als \vec{u} en \vec{v} loodrecht op elkaar staan geldt: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}|$,
- (iv) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{v}_{\vec{u}^\perp} = \vec{u}_{\vec{v}^\perp} \times \vec{v}$.

Als één van de vectoren de nulvector is, dan is ook het uitproduct gelijk aan nul. Voor vectoren \vec{u} en \vec{v} geldt: $\vec{u} \times \vec{u} = 0$ en $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$. De tweede eigenschap volgt uit de toepassing van de eerste eigenschap op het uitproduct $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v})$.

De eigenschappen hierboven maken duidelijk dat $\vec{u} \times \vec{v}$ de eenduidig bepaalde vector is waarvoor geldt dat hij loodrecht staat op het door \vec{u} en \vec{v} opgespannen parallellogram, zijn lengte gelijk is aan de oppervlakte (zie de opgave hierboven) van dat parallellogram, waarbij \vec{u} , \vec{v} en $\vec{u} \times \vec{v}$ georiënteerd zijn volgens de rechterhand-regel.

Definitie: Wij noemen $\vec{u} \times \vec{v}$ het *uit(wendig)product* van de vectoren \vec{u} en \vec{v} (spreek uit: ‘ \vec{u} uit \vec{v} ’).

Opgave:

- Toon aan dat: $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$ en $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta$, waarbij θ de hoek tussen \vec{u} en \vec{v} is.
- Bewijs dat voor vectoren \vec{u} en \vec{v} geldt:

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{u}) = |\vec{u}|^2 \vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{u} = |\vec{u}| \vec{v}_{\vec{u}^\perp}.$$

– Gegeven twee vectoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ en $\vec{v} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ dan geldt:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ -a_1 b_3 + a_3 b_1 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix}.$$

1.2. Het koppel

Een andere toepassing voor het uitproduct is de definitie van het koppel. Als men een schroef wil schroeven dan gaat dat het beste met een arm die loodrecht staat op de schroef: een schroevensleutel. Hoe groter de afstand is tussen de schroef en het punt op de schroevensleutel waarop een kracht wordt uitgeoefend hoe beter de schroef te draaien zal zijn. Als de arm niet loodrecht staat dan is het enige wat voor het schroeven telt het loodrechte deel van de arm. (Bijvoorbeeld als iemand probeert te schroeven door de schroevensleutel in verlenging op de schroef erop te zetten dan is de schroefkracht kennelijk nul.)

Op een punt van de arm wordt er bij het schroeven een kracht uitgeoefend en het enige wat er voor de *schroefkracht* toe doet is het gedeelte van de kracht dat loodrecht staat op de schroef en de schroevendraaier.

De effectiviteit van het schroeven in een gegeven richting heeft te maken met enerzijds de lengte van de schroevensleutel en de mate waarin hij loodrecht staat op de schroef en anderzijds met de kracht die op een punt van de schroevensleutel wordt uitgeoefend en de mate waarin deze kracht loodrecht staat op de schroef en de schroevensleutel.

We kunnen ook andersom redeneren. Gegeven een arm of hefboom, wiskundig voorgesteld door een vector \vec{r} , en een krachtsvector \vec{F} . Deze vectoren \vec{r} en \vec{F} leggen een richting vast waarin het beste geschroefd kan worden. Hoe sterker de kracht is en hoe langer de arm hoe effectiever er geschroefd kan worden. Uit de bovenste beschouwingen blijkt dat de mate en de richting waarin er effectief geschroefd kan worden gegeven wordt door het zogenaamde *koppel* ten opzichte van de oorsprong O dat wordt uitgedrukt door: $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$.

Als er een kracht werkt op een massadeeltje dan kunnen we het koppel van dat deeltje ten opzichte van elk willekeurig punt berekenen, hetgeen weergeeft in welke richting en hoe goed deze kracht toegepast op een hefboom naar dat willekeurig punt in staat zou zijn om een draaiing in gang te zetten.

1.3. Geparametriseerde ruimtekrommen

In het vervolg kijken we naar afbeeldingen van \mathbb{R} naar \mathbb{R}^3 waarbij wij denken aan de beweging van puntmassa's in de driedimensionale ruimte. Zo'n afbeelding $\vec{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ wordt gegeven door drie gewone differentieerbare functies:

$$\vec{F}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix}.$$

De parameter noemen we meestal t omdat wij hierbij denken aan de tijd.

Opgave:

(i) Beschrijf met je handen de ruimtekromme die wordt gegeven door

$$\vec{F}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

(ii) Bedenk andere eenvoudige krommen in de ruimte en probeer er een voorschrift voor te vinden.

De *afgeleide* van een dergelijke afbeelding kunnen we net als bij gewone functies verkrijgen door

$$\frac{d\vec{F}}{dt}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\vec{F}(t + \Delta t) - \vec{F}(t) \right) = \begin{pmatrix} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{f_1(t + \Delta t) - f_1(t)}{\Delta t} \right) \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{f_2(t + \Delta t) - f_2(t)}{\Delta t} \right) \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{f_3(t + \Delta t) - f_3(t)}{\Delta t} \right) \end{pmatrix}.$$

Zodra men hierbij denkt aan *de afgeleide naar de tijd* geeft deze afbeelding voor elk moment de richting en de snelheid aan waarmee een denkbeeldig massapunt beweegt. Als het gaat om de tijd, schrijven wis- en natuurkundigen $\dot{\vec{F}}(t)$ voor $\frac{d\vec{F}}{dt}$. De uitdrukking $\frac{1}{\Delta t} \left(\vec{F}(t + \Delta t) - \vec{F}(t) \right)$ waarin de vectoren $\vec{F}(t + \Delta t)$ en $\vec{F}(t)$ worden vermenigvuldigd met het reële getal $\frac{1}{\Delta t}$ schrijven wij soms ook als $\frac{\vec{F}(t + \Delta t) - \vec{F}(t)}{\Delta t}$.

Productregel voor in- en uitproduct van functies

Met dergelijke afbeeldingen \vec{F} en \vec{G} kan men rekenen als met vectoren (waarbij wij denken dat ze met de tijd veranderen). Bijvoorbeeld: de afbeeldingen $\vec{F} \times \vec{G}$ en $\langle \vec{F}, \vec{G} \rangle$ zijn gedefinieerd door $\vec{F} \times \vec{G}(t) = \vec{F}(t) \times \vec{G}(t)$ en $\langle \vec{F}, \vec{G} \rangle(t) = \langle \vec{F}(t), \vec{G}(t) \rangle$ waarbij aan de rechterkant voor elke t producten van gewone vectoren staan. De afgeleiden van deze afbeeldingen $\vec{F} \times \vec{G}$ en $\langle \vec{F}, \vec{G} \rangle$ kunnen we net zo bepalen als wij dat kennen van gewone functies – met de productregel. Het bewijs hiervoor is bijna letterlijk hetzelfde als bij de productregel

voor gewone functies.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left(\vec{F} \times \vec{G}(t + \Delta t) - \vec{F} \times \vec{G}(t) \right) \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left(\left[\vec{F}(t + \Delta t) \times \vec{G}(t + \Delta t) - \vec{F}(t + \Delta t) \times \vec{G}(t) \right] \right. \\ & \quad \left. + \left[\vec{F}(t + \Delta t) \times \vec{G}(t) - \vec{F}(t) \times \vec{G}(t) \right] \right) \\ &= \left(\left[\vec{F}(t + \Delta t) \times \frac{\vec{G}(t + \Delta t) - \vec{G}(t)}{\Delta t} \right] + \left[\frac{\vec{F}(t + \Delta t) - \vec{F}(t)}{\Delta t} \times \vec{G}(t) \right] \right). \end{aligned}$$

Als men nu Δt naar nul laat gaan blijkt dat ook voor het uitproduct de gewone productregel geldt:

$$\frac{\vec{F} \times \vec{G}}{dt} = \frac{d\vec{F}}{dt} \times \vec{G} + \vec{F} \times \frac{d\vec{G}}{dt} = \dot{\vec{F}} \times \vec{G} + \vec{F} \times \dot{\vec{G}}.$$

Opgave: Formuleer en bewijs de productregel voor $\langle \vec{F}, \vec{G} \rangle$.

2. Newton mechanica

Het natuurkundige uitgangspunt voor alle wiskunde die nu volgt, wordt gegeven door de klassieke wetten van Newton.

Laat \vec{r} , \vec{r}_1 en \vec{r}_2 de positievectoren van deeltjes met massa's m , m_1 , m_2 ten opzichte van O zijn. \vec{r} , \vec{r}_1 en \vec{r}_2 zijn hierbij functies van de tijd t . (Wiskundig gezien gaat het hier om drie ruimtekrommen zoals we die hierboven hebben ingevoerd en drie positieve getallen m , m_1 , m_2 .) Dan zijn de bijbehorende snelheden \vec{v} , \vec{v}_1 en \vec{v}_2 . Hierbij horen impulsen \vec{P} , \vec{P}_1 en \vec{P}_2 gegeven door $\vec{P} = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$ als ook $\vec{P}_1 = m_1\vec{v}_1 = m_1\dot{\vec{r}}_1$ en $\vec{P}_2 = m_2\vec{v}_2 = m_2\dot{\vec{r}}_2$ die kunnen worden opgevat als de *hoeveelheid beweging*.

- **Newtons eerste wet** Een lichaam blijft stil staan of beweegt eenparig (zonder versnelling) als er geen kracht op wordt uitgeoefend.
- **Newtons tweede wet** De versnelling die een lichaam ervaart is evenredig met de op hem werkende kracht en omgekeerd evenredig met de massa van het lichaam: $\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F}$ of $\vec{F} = m\vec{v} = m\ddot{\vec{r}}$. Kort: $\vec{F} = \dot{\vec{P}}$.
- **Newtons derde wet (actio = reactio)** Als twee lichamen onderling krachten op elkaar uitoefenen dan wordt er op beide lichamen een even grote kracht uigeoefend in tegengestelde richtingen. D.w.z. de som van de kracht \vec{F}_{12} op het eerste lichaam (1) vanuit het tweede lichaam (2) en de kracht \vec{F}_{21} op het tweede lichaam (2) vanuit het eerste lichaam (1) is gelijk aan nul, i.e. $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$ oftewel $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.
- **Newtons wet van universele gravitatie** Verder heeft Newton de gravitatiewet geformuleerd die beschrijft hoe sterk de kracht is die een lichaam met massa m_1 uitoefent op een lichaam met massa m_2 . Als we met $\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ de vector tussen de twee lichamen aangeven met afstand d dan geldt voor deze kracht:

$$\vec{F} = \vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{d^2} \frac{\vec{r}_{21}}{d} = G \frac{m_1 m_2}{d^3} \vec{r}_{12}.$$

De constante G heet de *gravitatieconstante*. Haar waarde is

$$G \approx 6,672610^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}.$$

2.1. Bewegen op een cirkel

Voor cirkelvormige bewegingen is er een bijzondere middelpuntzoekende kracht nodig en de beschrijving van de snelheid van deze beweging kan het beste via de hoeksnelheid gebeuren.

Middelpuntzoekende kracht

We kijken nu naar cirkelvormige bewegingen in de ruimte. Stel dat \vec{r} de positievector is van zulk een cirkelvormige beweging met constante absolute snelheid. Dan is $|\vec{r}|^2 = \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle$ constant en met de productregel vinden wij de eerste afgeleide naar de tijd: $\langle \dot{\vec{r}}, \vec{r} \rangle + \langle \vec{r}, \dot{\vec{r}} \rangle = 2 \langle \vec{r}, \dot{\vec{r}} \rangle = 0$. Dus $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ staat loodrecht op \vec{r} . Omdat de snelheid van de beweging constant is, is $|\vec{v}|^2 = \langle \dot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}} \rangle$ constant. Daarom is de afgeleide hiervan nul waaruit volgt dat $\ddot{\vec{r}}$ dus weer loodrecht staat op $\dot{\vec{r}}$ en dus in de richting van \vec{r} of in de tegengestelde richting wijst. In de eerder gebruikte notatie betekent dit:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_{\vec{r}} = \frac{\langle \ddot{\vec{r}}, \vec{r} \rangle}{|\vec{r}|^2} \vec{r} = \frac{\langle \ddot{\vec{r}}, \vec{r} \rangle}{|\vec{r}|} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

Differentiëren van $\langle \vec{r}, \dot{\vec{r}} \rangle$ levert dan ook op $\langle \ddot{\vec{r}}, \vec{r} \rangle + \langle \dot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}} \rangle = 0$. Anders geschreven vinden wij de uitdrukking voor de *middelpuntzoekende versnelling*:

$$\ddot{\vec{r}} = - \left(\frac{|\vec{v}|^2}{|\vec{r}|} \right) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

Voor de grootte van de versnelling is dus $a = \frac{v^2}{r}$ met $a = \left| \ddot{\vec{r}} \right|$. Met de tweede wet van Newton is de centripetale kracht of middelpuntzoekende kracht gelijk aan

$$\vec{F}_{centripetaal} = -m \frac{v^2}{r} \frac{\vec{r}}{r}$$

en voor de grootte van deze kracht geldt: $F_{centripetaal} = m \frac{v^2}{r}$. Deze kracht is dus nodig om een deeltje op een cirkelbaan te laten bewegen.

Hoeksnelheid

De snelheid van een draaiing kan het beste worden weergegeven door de hoeksnelheid die aangeeft hoe een hoek θ (in radialen) met de tijd verandert, dus $\omega = \frac{d\theta}{dt}$. De hoeksnelheid is dus niet meer de snelheid van beweging maar wel *de snelheid van een draaiing*. Voor de snelheid zelf geldt dan $v = \omega R$ omdat voor de afgelegde afstand s geldt $s = \theta R$. Hiermee kan de centripetale kracht worden uitgedrukt door $F_{\text{centripetaal}} = mR\omega^2$. Wij zien hieruit dat bij een gegeven hoeksnelheid de middelpuntzoekende kracht lineair groeit met de afstand naar het middelpunt.

Het uitproduct geeft ons de mogelijkheid om voor een cirkelvormige beweging *de snelheid en de richting van de draaiing* in een enkele grootheid, de *hoeksnelheidsvector*, samen te vatten. De snelheidsvector \vec{v} van een cirkelvormig rond een punt O bewegend deeltje kan als veralgemenisering van $v = \omega R$ worden uitgedrukt door $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Daarbij wijst de vector $\vec{\omega}$ in de richting van de draaias en staat loodrecht op de positievector \vec{r} en daarom geldt dan ook hier $v = \omega R$ met $v = |\vec{v}|$, $\omega = |\vec{\omega}|$ en $r = |\vec{r}|$. Wij zien dus dat de lengte ω van deze vector gelijk is aan de hoeksnelheid zoals boven weergegeven.

2.2. Impuls, koppel en impulsmoment

In het vervolg leggen wij uit hoe uit de wetten van Newton het behoud van impuls en impulsmoment (draai-impuls) volgt.

Impulsbehoud

Laat \vec{r} , \vec{r}_1 en \vec{r}_2 de positievectoren zijn van deeltjes met massa's m , m_1 , m_2 ten opzichte van O . Deze drie positievectoren zijn hierbij functies van de tijd t en de bijbehorende impulsen zijn \vec{P} , \vec{P}_1 en \vec{P}_2 . Newtons derde wet (actio = reactio) zegt nu dat als twee lichamen krachten op elkaar uitoefenen, de som van de kracht \vec{F}_{12} op het tweede lichaam (2) vanuit het eerste lichaam (1) en de kracht \vec{F}_{21} op het eerste lichaam (1) vanuit het tweede lichaam (2) gelijk is aan nul, i.e. $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$. Hieruit volgt met de tweede wet dat $\dot{\vec{P}}_1 + \dot{\vec{P}}_2 = 0$. Dus is $\vec{P}_1 + \vec{P}_2$ constant (de wet van impulsbehoud).

Hieruit kan men bijvoorbeeld rechtstreeks eenvoudige gevolgtrekkingen maken voor de botsing van twee deeltjes, zij het elastisch (dat ze weer uit elkaar vliegen) of inelastisch (dat ze samen blijven klonteren), die in natuurkundeboeken uitgebreid worden besproken.

Impulsmoment of draai-impuls

Laat \vec{r} de positievector (als functie van de tijd t) van een deeltje met massa m ten opzichte van een willekeurig punt O zijn met impuls \vec{P} . Dan heten

- $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{P}$ het *impulsmoment* of de *draai-impuls* met betrekking tot oorsprong O (vaak gebruikt men ook de letter L resp. \vec{L}),
- $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$ het *koppel* of *draaimoment* met betrekking tot oorsprong O (hiervoor wordt ook de letter τ resp. $\vec{\tau}$ gebruikt).

Het impulsmoment kan worden opgevat als de *hoeveelheid draaiing*.

STELLING 2.1 Voor een enkel massadeeltje geldt: $\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{N}$.

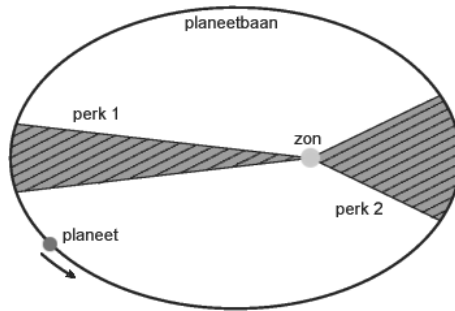
Opgave: Bewijs dit. Voor een deeltje waarop geen uitwendige kracht werkt, geldt dus dat \vec{J} constant is. Hoe verhoudt zich dit tot de eerste wet van Newton?

In het resterende gedeelte van deze bijdrage worden alleen nog maar conclusies uit deze stelling getrokken. Hier al enkele eenvoudige gevolgen voor een enkel massadeeltje.

- Als het deeltje in een centraal krachtenveld beweegt waarbij de oorsprong O in het centrum van dat krachtenveld ligt en alle krachtsvectoren naar de oorsprong wijzen, dan is $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$ omdat \vec{r} en \vec{F} in tegengestelde richting wijzen. Met de stelling volgt hieruit dat het impulsmoment $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{P} = 0$ blijft behouden. Dat betekent dus dat de met de tijd veranderende vector \vec{r} altijd loodrecht staat op de vaste vector \vec{J} . Dat betekent dat de vector \vec{r} alleen nog maar in een vlak kan bewegen namelijk het vlak van alle vectoren die loodrecht staan op deze vaste vector \vec{J} .
- Het feit dat $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{P}$ constant is, betekent dat $\vec{r} \times \vec{v}$ constant blijft. Als wij nu voor kleine tijdsintervallen Δt de afgeleide benaderen door $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ dan is $\vec{r} \times \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} (\vec{r} \times \Delta \vec{r})$ voor kleine tijdsintervallen altijd even groot. De uitdrukking $|\vec{r} \times \Delta \vec{r}|$ geeft twee keer de oppervlakte aan van de driehoek weer die wordt opgespannen door \vec{r} en $\Delta \vec{r}$. Bij benadering is dat de oppervlakte die de positievector \vec{r} in de tijd Δt heeft bestreken. Als wij nu met $A(t)$ de oppervlakte noteren die de positievector vanaf een tijdstip t_0 heeft bestreken dan volgt uit het bovenstaande $\frac{\Delta A}{\Delta t} \approx \frac{1}{2\Delta t} |\vec{r} \times \Delta \vec{r}|$ en daarom geldt: $\dot{A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \frac{1}{2m} J$ en dat is constant. Dus is de oppervlakte een lineaire functie in t . Uit het behoud van het impulsmoment in een centrale kracht (zonder dat er meer over bekend is) volgt de zogenaamde *perkenwet van Kepler* die ook bekend staat als zijn tweede wet en ook zonder de boven geschetste benaderingen worden afgeleid.

De snelheid van een planeet in haar omloopbaan verandert zodanig dat in gelijke tijdsintervallen de oppervlakte, bestreken door de rechte lijn (voerstraal) tussen de zon en de planeet, gelijk is.

Opmerking: Als het deeltje met massa m net als boven in een centraal krachtenveld beweegt dat ontstaat door de zwaartekracht vanuit een andere massa M in de oorsprong O , dan is de kracht dus bepaald door de universele gravitatiewet. Hieruit kan dan worden afgeleid dat het deeltje op een ellipsbaan beweegt. Dit is *de eerste wet van Kepler* en het was Isaac Newton die uit Kepler's wetten de universele gravitatiewet wist af te leiden. In het vervolg van



Figuur 4. De tweede wet van Kepler: de perkenwet.

dit stuk echter veronderstellen wij de planetenbanen als cirkelvormig. Gezien de kleine excentriciteiten van de beschouwde ellipsbanen blijft dit het gedrag van de dubbelplaneten goed beschrijven.

Behoud van het totale impulsmoment

Veel systemen bestaan uit meerdere puntmassa's: aan de ene kant kunnen bijvoorbeeld planeten worden opgevat als samenvoeging van afzonderlijke kleine puntmassa's en aan de andere kant kunnen systemen van meerdere planeten worden opgevat als puntmassa's die in hun zwaartepunten zijn geconcentreerd. In het eerste geval denken wij aan oneindig veel deeltjes en kunnen tot de limiet overgaan en in het tweede geval gaat het maar om enkele massadeeltjes.

Gegeven N deeltjes met massa's m_1, \dots, m_N en positievectoren $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ vanuit een willekeurig punt O . Het totale impulsmoment van het systeem is dan gegeven door $\vec{J}_{tot} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{P}_i$ en het totale koppel is $\vec{N}_{tot} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i$. De boven bewezen stelling heeft rechtstreeks de stelling hieronder tot gevolg.

STELLING 2.2 Voor het totale impulsmoment en het totale koppel geldt:

$$\frac{d\vec{J}_{tot}}{dt} = \vec{N}_{tot}.$$

Als het totale koppel verdwijnt, blijft ook het totale impulsmoment behouden. Op het i -de deeltje werkt een kracht \vec{F}_i die is samengesteld uit de krachten \vec{F}_{ij} die door de andere deeltjes worden uitgeoefend en een externe kracht $\vec{F}_{i,ext}$. Dus $\vec{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{i,ext}$. Het aandeel $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij}$ van de kracht \vec{F}_i noemen we de interne kracht $\vec{F}_{i,int}$ op deeltje (i). Dus $\vec{F}_i = \vec{F}_{i,int} + \vec{F}_{i,ext}$ op deeltje (i).

STELLING 2.3 Als een aantal puntmassa's of zonder externe krachten of in een centraal krachtenveld beweegt, is het totale koppel gelijk aan nul en het totale impulsmoment blijft behouden.

Bewijs: In beide gevallen geldt voor de i -de puntmassa: $\vec{r}_i \times \vec{F}_{i,ext} = 0$. Als er geen externe kracht is geldt $\vec{F}_{i,ext} = 0$ en in een centraal krachtenveld wijzen \vec{r}_i en $-\vec{F}_{i,ext}$ in dezelfde richting, dus ook hier geldt: $\vec{r}_i \times \vec{F}_{i,ext} = 0$.

$$\begin{aligned}
 \vec{N} &= \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times (\vec{F}_{i,ext} + \vec{F}_{i,int}) \\
 &= \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,ext}}_{=0} + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,int} \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \sum_{i < j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \sum_{i < j} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} \\
 &= \sum_{i < j} (\vec{r}_i - \vec{r}_{CM}) \times \vec{F}_{ij} - \sum_{i < j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \\
 &= \sum_{i < j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0.
 \end{aligned}$$

Q.e.d.

Rotaties

Als we kijken naar een draaiende hoepel of een fietswiel met massa m vanuit het middelpunt dat wij ons voorstellen als bestaand uit kleine puntmassa's m_1, \dots, m_N , dan is het totale impulsmoment

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{P}_i = \vec{N} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i.$$

De vectoren \vec{r}_i en \vec{v}_i staan altijd loodrecht op elkaar en daarom wijst $\vec{r}_i \times \vec{v}_i$ in de richting van de draaias en heeft lengte $|\vec{r}_i| |\vec{v}_i| = r \cdot v$ waarbij r en v de afstand van de puntmassa naar het middelpunt en de snelheid aangeven die voor elke puntmassa hetzelfde zijn. Dus \vec{J} wijst in de richting van de draaias en $J = mrv$. Als wij de snelheid v met behulp van de hoeksnelheid ω uitdrukken, $v = \omega \cdot r$, dan vinden wij $J = m r^2 \omega$. Hierdoor blijkt al dat hoe kleiner de straal r wordt hoe groter de snelheid ω van de draaiing wordt. Dit is een effect dat ook veelvuldig bij kunstschaatsers en op speeltuintoestellen te observeren is.

Gyroscopisch effect

Stel wij oefenen nu voor een korte tijd Δt een kracht in de richting van de rotatie-as uit op de rand (door bijvoorbeeld een slag of door een korte beweging van het stuur). De formule $\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{N}$ kunnen wij bij benadering lezen als: $\Delta\vec{J} = \vec{N}\Delta t$. Bij een dergelijke toepassing van het koppel \vec{N} op het systeem wijst dus het verschil $\Delta\vec{J}$ van het impulsmoment in dezelfde richting

als \vec{N} (en niet in dezelfde richting als \vec{J} want die wijst in de richting van de draaias). De draaias verandert dus met $\Delta\vec{J}$ van richting als \vec{N} voor een moment Δt werkt. Dat is in een andere richting dan de uitoefening van de kracht doet vermoeden. Dit noemt men het *gyroscopisch effect*. Dit effect gaat bij veel mensen tegen de intuïtie in. Het verklaart waarom een tol niet kantelt; zodra de zwaartekracht hem naar beneden duwt zorgt dit effect ervoor dat hij in een zijwaartse beweging, de zogenaamde *precessie*, terecht komt waardoor de bovenkant van de tol rondjes gaat draaien.

3. Impulsmoment verdelen op zwaartepunten

Gegeven N deeltjes met massa's m_1, \dots, m_N en positievectoren $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$. Dan definiëren wij het *zwaartepunt* van deze N deeltjes door $\vec{r}_{CM} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{m} \vec{r}_i$ waarbij we $m = \sum_{i=1}^N m_i$ beschouwen als massa van het zwaartepunt (CM staat voor *center of mass*). Een zwaartepunt gedraagt zich in veel opzichten als een enkel massapunt. Daardoor zijn enkele grootheden die voor de afzonderlijke deeltjes bestaan ook zinvol te definiëren voor het zwaartepunt.

Als wij met een homogeen lichaam met dichtheid ρ te maken hebben, is $m = \rho V$ waarbij V de inhoud van het lichaam weergeeft. Vaak stellen wij ons voor dat dit lichaam bestaat uit een groot aantal (N) kleine massadeeltjes met massa's m_1, \dots, m_N . Een vast lichaam kan men opvatten als een verzameling van verschillende kleine massadeeltjes m_1, \dots, m_N met positievectoren $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ waarvoor geldt: $m = m_1 + \dots + m_N$. De totale impuls is dan gelijk aan de *impuls van het zwaartepunt*: $\vec{P}_{CM} = m\dot{\vec{r}}_{CM}$. Men kan hiermee het zwaartepunt opvatten als massapunt met massa m , positievector \vec{r}_{CM} en impuls \vec{P}_{CM} .

Opgave: Laat aan de hand van de wetten van Newton zien dat als op het i -de deeltje een kracht \vec{F}_i werkt, dat dan met $\vec{F}_{ext} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$ ook voor het zwaartepunt de tweede wet van Newton geldt, i.e. $\vec{F}_{ext} = m\ddot{\vec{r}}_{CM}$ of $\vec{F}_{ext} = \dot{\vec{P}}_{CM}$.

3.1. Impulsmoment van baan en spin

De definitie van impulsmoment en koppel gelden met betrekking tot een willekeurig punt O . Hier kijken wij nu naar een systeem van N deeltjes en onderzoeken de grootheden in kwestie door ze zowel te relateren aan het punt O als ook aan het zwaartepunt. Bijvoorbeeld in systemen als de dubbelplaneet aarde-maan kan het zwaartepunt hiervan worden gerelateerd aan het impulsmoment gezien vanuit de zon.

Gegeven N deeltjes met massa's m_1, \dots, m_N en positievectoren $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ vanuit een willekeurig punt O . Dan kunnen we het totale impulsmoment ten opzichte van O als volgt splitsen in impulsmoment van het zwaartepunt ten opzichte van O (baan-impulsmoment) en impulsmoment van alle deeltjes ten

opzichte van het zwaartepunt (spin-impulsmoment):

$$\begin{aligned}\vec{J} &= \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{P}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_{CM}) \times \vec{P}_i}_{\text{spin}} + \underbrace{\vec{r}_{CM} \times \vec{P}_{CM}}_{\text{baan}} \\ &= \vec{J}_{\text{spin}} + \vec{r}_{CM} \times \vec{P}_{CM}.\end{aligned}$$

De vectoren $\vec{r}_i - \vec{r}_{CM}$ noemen we \vec{z}_i . Dan is $\vec{J}_{\text{spin}} = \sum_{i=1}^N \vec{z}_i \times \vec{P}_i$ het *spin-impulsmoment* of de *spin-draai-impuls* het totale impulsmoment ten opzichte van het zwaartepunt en \vec{J}_{baan} is het impulsmoment van het zwaartepunt ten opzichte van O , het zogenaamde *baan-impulsmoment* of de *baan-draai-impuls*.

Een vergelijkbare opsplitsing als bij het impulsmoment kan ook voor het totale koppel worden gemaakt. Dan is $\vec{N} = \vec{N}_{\text{int}} + \vec{N}_{\text{ext}}$ met $\vec{N}_{\text{int}} = \sum_{i=1}^N \vec{z}_i \times \vec{F}_i$ en $\vec{N}_{\text{ext}} = \vec{r}_{CM} \times \vec{F}_{\text{ext}}$. Daarbij draagt $\vec{F}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$ zijn naam terecht want \vec{F}_{ext} is ook gelijk aan $\sum_{i=1}^N \vec{F}_{i,\text{ext}}$, zoals wij boven bij de definitie van het zwaartepunt al hebben gezien.

Opmerking: Als wij naar een dubbelpianet kijken als bijvoorbeeld aarde-maan (met massa's m_A en m_M en totale massa $m = m_A + m_M$) in het centraal krachtenveld van de zon met massa M , dan is het totale impulsmoment behouden. Wij kunnen het totale impulsmoment splitsen in een deel ten opzichte van de zon en een deel ten opzichte van het zwaartepunt van de dubbelpianet. Het eerste impulsmoment van het zwaartepunt ten opzichte van de zon is $\vec{J}_{\text{baan}} = \vec{r}_{CM} \times \vec{P}_{CM}$ en de afgeleide geeft: $\frac{d\vec{J}_{\text{baan}}}{dt} = \dot{\vec{r}}_{CM} \times \vec{P}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{r}_{CM} \times \vec{F}_{\text{ext}}$. Deze vector \vec{F}_{ext} wijst niet noodzakelijk precies in de richting van $-\vec{r}_{CM}$.

De externe kracht op de dubbelpianet is

$$\vec{F}_{\text{ext}} = -G \frac{Mm_A}{r_A^3} \vec{r}_A - G \frac{Mm_M}{r_M^3} \vec{r}_M$$

waarbij \vec{r}_A en \vec{r}_M de positievectoren van de zon naar aarde en maan zijn. Als wij echter veronderstellen dat $\vec{r}_A \approx \vec{r}_M$ ongeveer gelijk zijn aan \vec{r}_{CM} (de verschillen zijn verwaarloosbaar klein in verhouding met de grootte van \vec{r}_{CM}) dan geldt $\vec{F}_{\text{ext}} = -G \frac{Mm}{r^3} \left(\frac{m_A}{m} \vec{r}_A + \frac{m_M}{m} \vec{r}_M \right) \approx -G \frac{Mm}{r^3} \vec{r}_{CM}$ en daarmee is dan $\frac{d\vec{J}_{\text{baan}}}{dt} = \vec{r}_{CM} \times \vec{F}_{\text{ext}} = 0$. In de beschouwingen over dubbelpianeten zullen wij daarom ook veronderstellen dat het impulsmoment $\vec{J} - \vec{J}_{\text{baan}}$ van de dubbelpianet ten opzicht van het zwaartepunt van de dubbelpianet behouden blijft.

3.2. Traagheidsmoment

De laatste grootheid die wij hier invoeren is het traagheidsmoment. Stel je voor je hebt een hoepel met straal r en massa m . Als wij de hoepel opdelen

in kleine stukjes met massa m_i , die allemaal met dezelfde snelheid $v = r\omega$ bewegen waar ω de hoeksnelheid weergeeft, dan is het impulsmoment ten opzichte van het zwaartepunt (spin-impulsmoment) gelijk aan

$$\vec{J} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{P}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i r^2 \vec{\omega} = mr^2 \vec{\omega}.$$

De grootte $I = mr^2$ hangt dus alleen af van het lichaam en niet van de snelheid ω van de draaiing (hoeksnelheid). I is het *traagheidsmoment* van de hoepel.

Als we nu kijken naar een star lichaam, dan draaien alle delen van het lichaam weliswaar met verschillende absolute snelheden afhankelijk van de afstand naar de draaias maar met dezelfde hoeksnelheid ω . We kijken nu naar een massadeeltje met massa m , positievector \vec{r} vanuit het zwaartepunt van het lichaam en snelheid \vec{v} . Nu kunnen we de hoeksnelheid beschouwen als vector $\vec{\omega}$ met lengte ω waarvoor geldt $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. De hoeksnelheid $\vec{\omega}$ wijst in de richting van de draaias. Hiermee zijn wij in staat om een uitdrukking voor het impulsmoment ten opzichte van het zwaartepunt te vinden die alleen afhangt van vorm en dichtheid van het lichaam en de hoeksnelheid $\vec{\omega}$. In principe gaat dit net als bij de hoepel.

Het totale impulsmoment is in het algemeen $\vec{J}_{tot} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$. Net als bij de hoepel willen wij hieruit een uitdrukking afleiden waarin de hoeksnelheidsvector los staat van de rest van de uitdrukking die dan alleen nog maar afhangt van de eigenschappen van het lichaam. Bij een willekeurig lichaam leidt dit tot de definitie van de zogenaamde *traagheidstensor*. In het geval van een homogeen bolvormig lichaam met straal R en dichtheid ρ is dit echter niet veel moeilijker dan bij de hoepel.

Hierbij herhalen wij in wezen het bewijs van de in opgave 1.1 te bewijzen formule $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{u}) = |\vec{u}|^2 \vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{u} = |\vec{u}| \vec{v}_{\vec{u}^\perp}$ voor vectoren \vec{u} en \vec{v} .

Elke vector \vec{r}_i kunnen wij opsplitsen in een deel \vec{a}_i dat loodrecht staat op $\vec{\omega}$ en een deel \vec{u}_i dat in dezelfde of in de tegengestelde richting van $\vec{\omega}$ wijst. Dus $\vec{r}_i = \vec{a}_i + \vec{u}_i$ met $\vec{a}_i = (\vec{r}_i)_{\omega^\perp}$ en $\vec{u}_i = (\vec{r}_i)_\omega$.

Dan berekenen wij \vec{J} als volgt:

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{a}_i) \\ &= \sum_i m_i (\vec{a}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{a}_i) + \vec{u}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{a}_i)) \\ &= \sum_i m_i (|\vec{a}_i|^2 \vec{\omega} - \omega |\vec{u}_i| \vec{a}_i) \\ &= \sum_i m_i |\vec{a}_i|^2 \vec{\omega} - \omega \sum_i m_i |\vec{u}_i|^2 \vec{a}_i. \end{aligned}$$

Het gedeelte $-\omega \sum_i m_i |\vec{u}_i|^2 \vec{a}_i$ echter verdwijnt bij een bolvormig lichaam omdat die zo in kleine massastukjes kan worden opgedeeld dat er een even aantal bijbehorende positievectoren $\vec{r}_{+1}, \dots, \vec{r}_{+N}$ en $\vec{r}_{-1}, \dots, \vec{r}_{-N}$ ontstaat bestaande

uit paren van telkens twee vectoren $\vec{r}_{\pm i} = \vec{u}_i \pm \vec{a}_i$ waar de loodrecht op $\vec{\omega}$ staande delen elkaar opheffen. Voor een bolvormig lichaam houden we dus over: $\vec{J} = \vec{\omega} \sum_i m_i |\vec{a}_i|^2 = I_{bol} \vec{\omega}$, waarbij $I_{bol} = \sum_i m_i |\vec{a}_i|^2$ het *traagheidsmoment* is. Hierbij kan m_i worden gezien als ρV_i met het bijbehorende deel V_i van de inhoud V . Om het traagheidsmoment te berekenen delen wij de bol op in even grote schijfjes van dikte Δh . Op hoogte h heeft een dergelijke schijf breedte B , waarbij geldt: $B = \sqrt{R^2 - h^2}$. Deze schijfjes delen wij vervolgens op in ringen met een straal van b tot $b + \Delta b$ en dikte Δh . Het traagheidsmoment voor zulk een ring is dan $\rho \pi \left((b + \Delta b)^2 - b^2 \right) \cdot \Delta h \cdot b^2$. Als we dit verder uitwerken krijgen we: $\rho \pi (2b\Delta b - \Delta b^2 - b^2) \cdot \Delta h \cdot b^2 = \rho \pi 2b\Delta b \cdot \Delta h \cdot b^2 - \rho \pi \Delta b^2 \cdot \Delta h \cdot b^2$. Nu nemen we de som over de ringen in de schijf met straal B . Dan wordt de som over $\Delta b^2 \cdot \Delta h \cdot b^2$ willekeurig klein als we Δb klein kiezen.

Het impulsmoment van een dergelijke ring wordt dus gegeven door

$$\rho \pi \Delta h \int_0^B 2b^3 db = \rho \frac{\pi}{2} \Delta h B^4.$$

Nu sommeren wij over alle schijven en vinden voor het traagheidsmoment: $I_{bol} = \rho \frac{\pi}{2} \int_{-R}^R (R^2 - h^2)^2 dh$. Met de formule $\frac{4}{3} \pi R^3$ voor de inhoud van de bol is $\vec{J} = I_{bol} \vec{\omega}$, waarbij I_{bol} het *traagheidsmoment* is van een bolvormig lichaam met straal R dat gegeven wordt door: $I_{bol} = \frac{2}{5} m R^2$.

4. Behoud van impulsmoment bij dubbelpianeten

Hier passen we de boven geschetste theorie toe op speciale gevallen die een rol spelen voor onze beschouwingen in de astrofysica. Wij hanteren hierbij de vereenvoudigende (en feitelijk gezien onjuiste) aanname dat de maan rond de aarde op een cirkelbaan beweegt. Eveneens veronderstellen wij dat het zwaartepunt van de twee niet beweegt.

4.1. Dubbelpianeten

Hier hebben wij te maken met twee bolvormige vaste lichamen met massa's m_1 en m_2 , positievectoren \vec{r}_1 en \vec{r}_2 vanuit het gemeenschappelijk zwaartepunt en onderlinge afstand r . Dan is de positievector van het zwaartepunt gelijk aan $\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m}$ met $m = m_1 + m_2$ en er geldt $\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ en $\vec{r}_2 = \frac{m_1}{m} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$. Daarmee liggen dus m_1 resp. m_2 op afstand $r_1 = |\vec{r}_1| = \frac{m_2}{m} r$ resp. $r_2 = |\vec{r}_2| = \frac{m_1}{m} r$ van het zwaartepunt. Nu kijken we naar de draaiing van de twee massa's rond het zwaartepunt en willen hiervoor de hoeksnelheid bepalen. Dit doen wij middels de derde wet van Newton door de centrifugale kracht en de gravitatiekracht aan elkaar gelijk te stellen. Op massa m_1 werkt in de richting $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ de gravitatiekracht vanuit massa m_2 die zich op afstand $r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ van elkaar bevinden. Deze kracht is dus gelijk aan $\vec{F}_{gravitatie} = G \frac{m_1 m_2}{r^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$. Tegelijkertijd werkt de centrifugale kracht op massa m_1 de andere kant op: $\vec{F}_{centrifugaal} = -m_1 \frac{v^2}{r_1 r} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -m_1 r_1 \omega^2 \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{r}$, waarbij

ω de hoeksnelheid aangeeft met $v = r_1\omega$. Hiermee lukt het de hoeksnelheid te bepalen.

$$G \frac{m_1 m_2}{r^3} = -m_1 r_1 \omega^2 \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \sqrt{G \frac{(m_1 + m_2)}{r^3}}.$$

Wij zien hieruit bijvoorbeeld dat de lichamen steeds sneller roteren naarmate ze dichter bij elkaar komen.

Opmerking: Uit het evenwicht van gravitatiekracht en middelpuntzoekende kracht blijkt dat de omlooptijd T evenredig is met $r^{\frac{3}{2}}$. Dit staat in zijn algemene vorm bekend als de *derde wet van Kepler*, die een verband aangeeft tussen de afstand van de planeten en de omlooptijd. Behalve voor cirkelbanen geldt dit ook voor ellipsbanen (r is de halve lange as).

Met de voorbereiding in de paragrafen hiervoor zijn wij nu in staat om het totale impulsmoment te berekenen. Omdat dubbelplaneten in een centraal krachtenveld ver weg van de zon bewegen, is het totale impulsmoment \vec{J} ten opzichte van het zwaartepunt van de dubbelplaneet nagenoeg constant (zie opmerking 3.1). Wij splitsen \vec{J} op in het impulsmoment ten opzichte van de zwaartepunten van elk van de planeten en de impulsmomenten van elk massadeeltje van een planeet ten opzichte van het zwaartepunt van deze planeet. $\vec{r}_{1,i}$ resp. $\vec{r}_{2,i}$ met impulsen $\vec{P}_{1,i}$ en $\vec{P}_{2,i}$ zijn de positievectoren van het i -de massadeeltje van planeet (1) resp. (2) met massa $m_{1,i}$ resp. $m_{2,i}$.

Voor de positievectoren vanuit de zwaartepunten van de planeten schrijven wij $\vec{z}_{1,i} = \vec{r}_{1,i} - \vec{r}_{1,CM}$ en $\vec{z}_{2,i} = \vec{r}_{2,i} - \vec{r}_{2,CM}$. Dan vinden wij:

$$\vec{J} = \sum_i \vec{z}_{1,i} \times \vec{P}_{1,i} + \sum_i \vec{z}_{2,i} \times \vec{P}_{2,i} + \sum_i \vec{r}_{1,CM} \times \vec{P}_{1,i} + \sum_i \vec{r}_{2,CM} \times \vec{P}_{1,i}$$

waarbij de positievectoren $\vec{r}_{1,CM}$ en $\vec{r}_{2,CM}$ uitgaan van het algehele zwaartepunt van de dubbelplaneet. $\vec{P}_{1,i}$ is gelijk aan $(\vec{P}_{1,i} - \vec{P}_{1,CM}) + \vec{P}_{1,CM}$ en daarbij is $\vec{P}_{1,i} - \vec{P}_{1,CM}$ de impuls waarmee de i -de puntmassa rond het zwaartepunt van planeet (1) roteert. $\sum_i \vec{z}_{1,i} \times \vec{P}_{1,CM} = (\sum_i \vec{z}_{1,i}) \times \vec{P}_{1,CM}$ is gelijk aan nul als de bolvormige planeet op een symmetrische manier in massadeeltjes is opgedeeld waarbij er voor elke vector $\vec{z}_{1,i}$ zo'n tegenovergestelde vector in de som $\sum_i \vec{z}_{1,i}$ te vinden is. Hetzelfde geldt voor planeet (2). Als we dit samenvatten, houden wij de volgende uitdrukking over:

$$\begin{aligned} \vec{J} = \sum_i \vec{z}_{1,i} \times (\vec{P}_{1,i} - \vec{P}_{1,CM}) + \sum_i \vec{z}_{2,i} \times (\vec{P}_{2,i} - \vec{P}_{2,CM}) \\ + \vec{r}_{1,CM} \times \vec{P}_{1,CM} + \vec{r}_{2,CM} \times \vec{P}_{2,CM}. \end{aligned}$$

Met de berekeningen voor het traagheidsmoment vinden wij:

$$\vec{J} = I_1 \vec{\Omega}_1 + I_2 \vec{\Omega}_2 + (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) \vec{\omega} \quad \text{oftewel} \quad (4.1)$$

$$\vec{J} = I_1 \vec{\Omega}_1 + I_2 \vec{\Omega}_2 + \mu r^2 \vec{\omega}$$

Hierbij is $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ de zogenaamde *gereduceerde massa*. $\vec{\Omega}_1$ en $\vec{\Omega}_2$ staan voor de rotatiesnelheden van de planeten (1) en (2).

Opgave: Laat zien dat $m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = \mu r^2$.

Dit was het voorwerk. Met deze bagage zijn wij nu toegerust om diepere inzichten in bijvoorbeeld de eigenschappen van dubbelpianeten te verkrijgen.

4.2. Halley had toch gelijk

Hoe zit het nu met het verhaal van Halley? Hiervoor gaan wij zorgvuldig kijken naar het totale impulsmoment van aarde en maan. De traagheidsmomenten van aarde $I_A = \frac{2}{5} m_A R_A^2$ en maan $I_M = \frac{2}{5} m_M R_M^2$ zijn nogal verschillend van grootte: $I_A = 9,69865 \cdot 10^{31}$ kg km² en $I_M = 8,87948 \cdot 10^{28}$ kg km², d.w.z. I_M is minder dan een duizendste van I_A (zie tabel 1).

De hoeksnelheid van aarde en maan wordt relatief tot de vaste sterren gemeten. Hierbij verwaarlozen wij het tollen van de aardas (precessie). Gezien vanuit de vaste sterren draait de aarde in 365,2564 dagen 366,2564 keer om haar eigen as. Daardoor geldt voor de hoeksnelheid $\Omega_A = 2\pi \frac{366,2564}{365,2564} \frac{1}{\text{dag}} = 6,30039 \frac{1}{\text{dag}}$. De maan draait niet meer ten opzichte van de aarde maar wel ten opzichte van de vaste sterren. De maanden zoals wij die vanaf de aarde zien (de *synodische* maanden) zijn 29,53 dagen lang. Gezien vanuit de aarde draait de maand in één jaar dus $\frac{365,2564}{29,53}$ keer rond de aarde. Omdat het hele systeem in een jaar rond de zon draait is $\Omega_M = 2\pi \frac{365,2564}{365,2564} \frac{1}{\text{dag}} = 0,229975 \frac{1}{\text{dag}}$. Dit geeft aan dat in de formule (4.1) het spin-impulsmoment van de maan kleiner dan een tienduizendste is van het spin-impulsmoment van de aarde. Daarom zullen wij het hier verwaarlozen. De draaiassen ω en Ω_A wijzen in dezelfde richting. De wet van impulsbehoud geeft daarmee een verband tussen r en Ω_A . Met m geven wij weer de totale massa aan: $m = m_A + m_M$.

$$J = \mu r^2 \omega + I_A \Omega_A = \mu \sqrt{Gm} r^{\frac{1}{2}} + I_A \Omega_A. \quad (4.2)$$

De tweede uitdrukking is afgeleid met behulp van de derde wet van Kepler

$$\omega = \sqrt{Gm} r^{-\frac{3}{2}} \quad (4.3)$$

die de afhankelijkheid tussen r en ω aangeeft. De tweede vergelijking uit (4.2) kunnen wij ook schrijven als:

$$\Omega_A = \frac{J}{I_A} - \frac{\mu}{I_A} \sqrt{Gm} r^{\frac{1}{2}}. \quad (4.4)$$

Het is een feit dat de getijden de draaisnelheid Ω_A van de aarde langzaam af laten nemen (zie [4], [5], [6]). Uit vergelijking (4.2) en het behoud van impulsmoment zien we dat daarmee r toe moet nemen. Dit is wat er ook werkelijk wordt geobserveerd. De afstand neemt met 3,82 cm per jaar toe.

De vergelijkingen (4.3) en (4.4) geven aan hoe r , ω en Ω_A van elkaar afhangen. Wij weten dat r langzaam toeneemt. Met name zijn we nu geïnteresseerd in de afhankelijkheid van de in dagen gemeten maandlengte van r .

Wij noemen $\lambda_m(r)$ de lengte van een maand en $\lambda_d(r)$ de lengte van een dag zoals wij die op aarde bij een gegeven afstand r tussen aarde en maan zouden waarnemen (d.w.z. *synodisch*). Dan geeft λ_m/λ_d het aantal dagen aan in een maand. Wij willen nu aantonen dat λ_m/λ_d voor de dubbelplaneet aarde-maan als functie van de afstand r rond de werkelijke afstand $r_0 = 3,8440 \cdot 10^5$ km dalend is. Omdat deze afstand daadwerkelijk toeneemt weten we dan dat de maanden korter worden als zij in dagen worden gemeten. Hiervoor willen we eerst het verband formuleren tussen λ_m en λ_d aan de ene kant en ω en Ω_A aan de andere kant die ten opzichte van de vaste sterren zijn gedefinieerd. Grootheden die ten opzichte van de vaste sterren worden bepaald, noemen we ook *siderisch* wat afkomstig is van het Latijnse woord *sidus* = ster. λ_j staat voor de lengte van een jaar en die hangt dus niet af van r .

De maan draait λ_j/λ_m keer per jaar rond de aarde, gezien vanuit de zon. Ten opzichte van de vaste sterren draait hij in één jaar $\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_m} + 1\right)$ keer rond zijn eigen as. Hierbij gebruiken wij weer dat de maan ten opzichte van de aarde stilstaat en dus ten opzichte van de zon per maand een rondje om zichzelf draait.

De siderische hoeksnelheid ω van de draaiende dubbelplaneet aarde-maan is dan

$$\omega = 2\pi \frac{\frac{\lambda_j}{\lambda_m} + 1}{\lambda_j} = 2\pi \left(\frac{1}{\lambda_m} + \frac{1}{\lambda_j} \right).$$

Willen we de afhankelijkheid van deze grootheden van r onderzoeken, dan kunnen wij hier de afgeleide naar r bestuderen die we met een accent ' aangeven, dus bijvoorbeeld $\omega' = \frac{\partial \omega}{\partial r}$.

$$\omega' = -2\pi \frac{\lambda_m'}{\lambda_m^2}. \quad (4.5)$$

Net zo draait de aarde λ_j/λ_d keer per jaar rond haar eigen as, gezien vanuit de zon. Ten opzichte van de vaste sterren draait hij in één jaar $\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_d} + 1\right)$ keer rond zijn eigen as. De siderische hoeksnelheid Ω_A van de aarde is dan

$$\Omega_A = 2\pi \frac{\frac{\lambda_j}{\lambda_d} + 1}{\lambda_j} = 2\pi \left(\frac{1}{\lambda_d} + \frac{1}{\lambda_j} \right).$$

De afgeleide naar r geeft hier:

$$\Omega_A' = -2\pi \frac{\lambda_d'}{\lambda_d^2}. \quad (4.6)$$

Wij willen weten of λ_m/λ_d voor aarde-maan bij groter wordende r rond de werkelijke afstand r_0 daalt of stijgt. In ieder geval vertelt ons de quotiëntregel dat geldt:

$$\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_d}\right)' < 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda_m'}{\lambda_d'} < \frac{\lambda_m}{\lambda_d}.$$

Hierbij moet wel veilig worden gesteld dat $\lambda_d' > 0$ is. Uit (4.4) volgt dat $\Omega_A' < 0$ is en samen met (4.6) zien we $\lambda_d' > 0$. Uit de formules (4.5) en (4.6) concluderen wij

$$\frac{\lambda_m'}{\lambda_d'} = \frac{\omega' \lambda_m}{\Omega_A' \lambda_d} \frac{\lambda_m}{\lambda_d}.$$

De in dagen gemeten maanden worden dus daadwerkelijk korter als geldt:

$$\frac{\omega' \lambda_m}{\Omega_A' \lambda_d} < 1. \quad (4.7)$$

Door de derde wet van Kepler te differentiëren volgt:

$$\omega' = -\frac{3}{2} \sqrt{Gm} r^{-\frac{5}{2}}.$$

De wet van impulsbehoud geeft na differentiatie naar r :

$$\Omega_A' = -\frac{\mu}{2I_A} \sqrt{Gm} r^{-\frac{1}{2}}.$$

Dit ingevuld in de ongelijkheid (4.7) levert de conditie:

$$\frac{\omega' \lambda_m}{\Omega_A' \lambda_d} = 3 \frac{\mu}{I_A} \frac{\lambda_m}{\lambda_d} r^{-2} < 1.$$

Opgave:

- (i) Gebruik de data in Tabel 1 om te laten zien dat bij aarde-maan werkelijk aan dit criterium is voldaan.
- (ii) Wat gebeurt er als aarde en maan dichter bij elkaar zouden staan?

4.3. Twee andere dubbelpianeten nader bekeken

Een en dezelfde formule (4.1) kan heel verschillende scenario's voor een dubbelpianete tot gevolg hebben.

Mars en Phobos

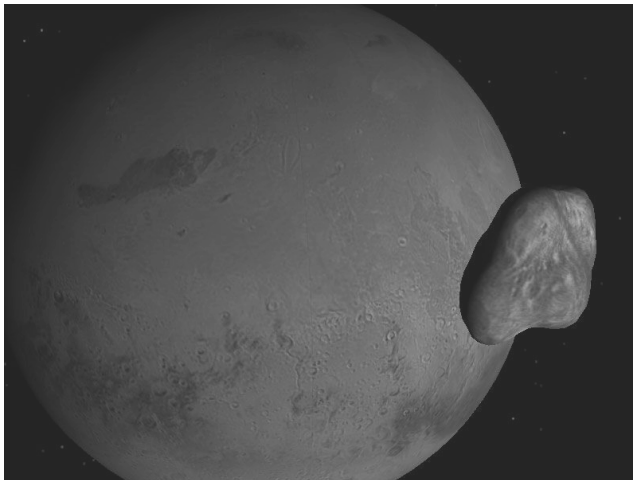
De planeet Mars heeft twee manen *Phobos* en *Deimos* oftewel *vrees* en *verschrikking*. Wij kijken hier naar de dubbelpianete Mars-Phobos.

Mars draait langzamer om zijn eigen as dan zijn maan Phobos om hem heen draait. Dat betekent dat de hoeksnelheid van Mars Ω_M en de hoekssnelheid van Phobos Ω_P wel in dezelfde richting wijzen, maar dat geldt: $\Omega_M < \Omega_P$. De getijdewerking zorgt er dan voor dat Ω_M toeneemt. De formule

$$\vec{J} = \mu r^2 \vec{\omega} + I_M \vec{\Omega}_M + I_P \vec{\Omega}_P$$

	Aarde	Maan
Straal	6371 km	1738 km
Massa	$5.9736 \cdot 10^{24}$ kg	$7.349 \cdot 10^{22}$ kg
tijdseenheid	tijd	
siderische dag	86164,1 seconde	
siderische maand	27,32166 dag	
siderisch jaar	365,2564 dag	
synodische maand	29,530589 dag	
synodische dag	1 dag = 24 h	
verdere grootheden		
afstand aarde-maan	$3,8440 \cdot 10^5$ km	
toename per jaar	3,82 cm	
excentriciteit maanbaan	0,05490	

Tabel 1. Belangrijke data voor aarde en maan.



Figuur 5. Dubbelplaneet Mars-Phobos. Zie pagina 137 voor een kleurenillustratie.

wordt met behulp van het verband tussen hoeksnelheid en afstand Mars-Phobos $\omega^2 r^3 = G(m_M + m_P)$ tot de identiteit:

$$J = \mu (G(m_M + m_P)r)^{\frac{1}{2}} + I_M \Omega_M + I_P \Omega_P.$$

We zien dus dat het impulsmoment alleen kan worden behouden als met toenemende Ω_M de afstand r afneemt. Mars en Phobos gaan dus langzaam naar elkaar toe totdat Phobos op Mars te pletter slaat.

Neptunus en Triton

Triton is met afstand de grootste van 13 bekende manen van Neptunus. De kleinste drie van deze manen zijn pas sinds 2004 bekend en de allerkleinste heeft een doorsnede van maar 54 km. Triton is de langst bekende maan van Neptunus, waarvan het bestaan al een maand na de ontdekking van de planeet (1846) werd bevestigd. Pas in 1949 werd door de Amerikaanse astronoom van Nederlandse afkomst Gerard Kuiper (1905-1973) de tweede maan Nereïde ontdekt. In de Griekse mythologie was Triton de oudste zoon van Poseidon die in de Romeinse mythologie Neptunus werd genoemd.

Bijzonder aan de dubbelplaneet Neptunus-Triton is dat Neptunus om zijn eigen as draait maar tegelijkertijd draait zijn maan Triton tegen de draaiing van Neptunus in: Triton beweegt *retrograde* om Neptunus heen. Triton heeft, als enige grote maan in ons zonnestelsel, zo'n retrograde baan. Daarnaast heeft de baan van Triton een opmerkelijk grote hoek (23°) ten opzichte van de evenaar van Neptunus. Hieruit concludeert men dat Triton niet is ontstaan rond Neptunus, maar later is ingevangen door Neptunus. Het lijkt dan ook goed mogelijk dat Triton vroeger deel uitmaakte van de zogenaamde Kuiper-gordel, een gordel van vele miljarden komeetachtige, uit rots en ijs bestaande objecten, voorbij de baan van Neptunus, de achtste planeet van ons zonnestelsel.

Ook bewegen Neptunus en Triton niet in hetzelfde vlak, al gaan we dit hier voor het gemak wel aannemen. Het is niet moeilijk het argument te nuanceren met de toevoeging dat de banen in een hoek van 23° staan.

De retrograde beweging betekent dat de hoeksnelheid van Neptunus Ω_N en de hoeksnelheid van Triton Ω_T in tegengestelde richting wijzen. De getijdewerking zorgt er ook hier voor dat Ω_N afneemt. De formule

$$\vec{J} = \mu r^2 \vec{\omega} + I_M \vec{\Omega}_M + I_P \vec{\Omega}_P$$

wordt dan met behulp van het verband tussen hoeksnelheid en afstand Mars-Phobos $\omega^2 r^3 = G(m_M + m_P)$ tot:

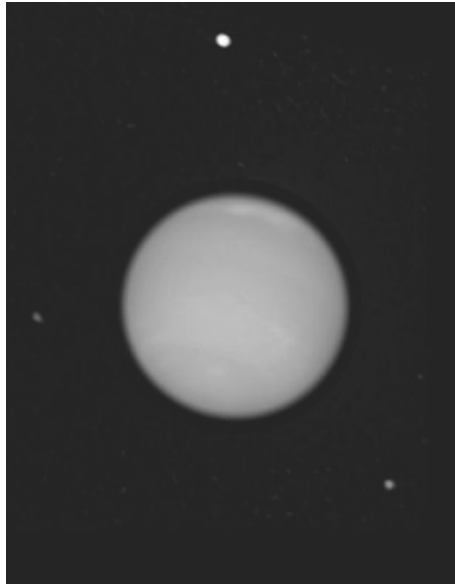
$$J = -\mu (G(m_N + m_T)r)^{\frac{1}{2}} + I_N \Omega_N + I_T \Omega_T.$$

Het behoud van impulsmoment zegt ons nu dat als Ω_T afneemt de afstand r eveneens af moet nemen. Dus ook Triton zal steeds dichterbij Neptunus komen totdat hij zo dichtbij komt dat hij door de getijden uiteen wordt gereten nadat hij de zogenaamde *Rochelimit* heeft bereikt. Triton zal naar verwachting binnen 100 miljoen jaar op Neptunus neerstorten.

Opgave: Vind een variant van het boven geschetste argument die rekening houdt met het feit dat de banen van Neptunus en Triton in vlakken liggen die een hoek van 23° met elkaar maken.

Literatuur

- [1] E. HALLEY (1695). *Some account of the ancient state of the city of Palmyra, with short remarks upon the inscriptions found there*. Philosophical Transactions, XIX:160-175.



Figuur 6. Neptunus met de drie grootste manen, opgenomen door het Hubble-ruimtetelescoop. Zie pagina 138 voor een kleurenillustratie.

- [2] E. HALLEY (1693). *Emendationes ac notae in vetustas albatênii observationes astronomicas*. Philosophical Transactions, XVII:913-921.
- [3] U. UFFRECHT & T. POPPE (2002). *Himmelsmechanik und Raumfahrt*. Stuttgart Düsseldorf Leipzig: Klett Verlag.
- [4] F. VERBUNT (2001). *Van Halley tot lunar ranging*, Zenit, april, 180-186.
- [5] F. VERBUNT (2001). *VLBI, zonsverduisteringen, schelpjes en modder*, Zenit, juni, 290-297.
- [6] F. VERBUNT (2002). *The Earth and Moon: from Halley to lunar ranging and shells*, <http://www.astro.uu.nl/~verbunt/onderzoek/earth.pdf>.

Webpagina's

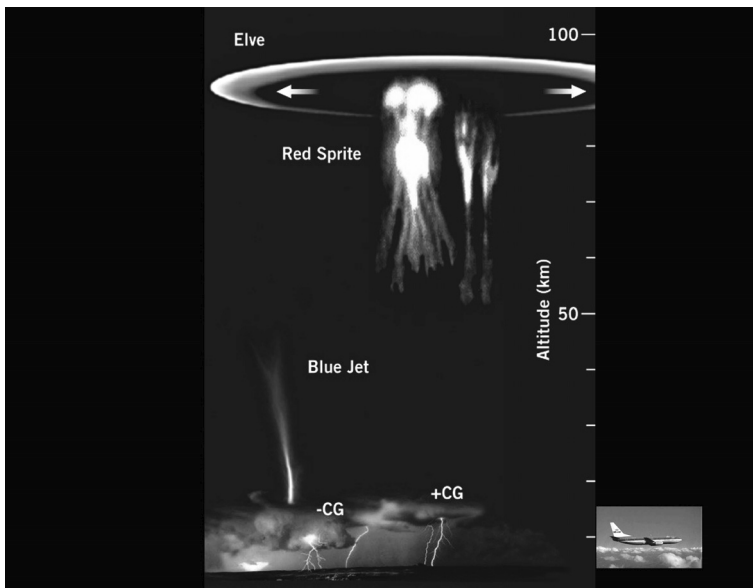
- [7] T(R)U's, samenwerking van de regionale Wiskunde D steunpunten aan de universiteiten Delft, Eindhoven, Twente en Nijmegen, <http://www.wiskundeDsteun.nl/>.
- [8] *Commissie Toekomst WiskundeOnderwijs*, cTWO, ministeriële vernieuwingscommissie wiskunde, <http://www.ctwo.nl>.

Donder en bliksem

Bernard Meulenbroek
Technische Universiteit Delft

1. Inleiding

Bliksem is een van de meest indrukwekkende natuurverschijnselen. Recent is gebleken, dat er zich rond onweerswolken veel meer afspeelt dan men oorspronkelijk dacht. Niet alleen onder en tussen de onweerswolken is bliksem te zien, ook boven de wolken zijn allerlei lichtverschijnselen waargenomen. Sommige zelfs tot in de ionosfeer, op 90 kilometer hoogte. Een overzicht van deze verschijnselen zien we in Figuur 1.



Figuur 1. Gasontladingen boven onweerswolken. Zie pagina 141 voor een kleurenillustratie.

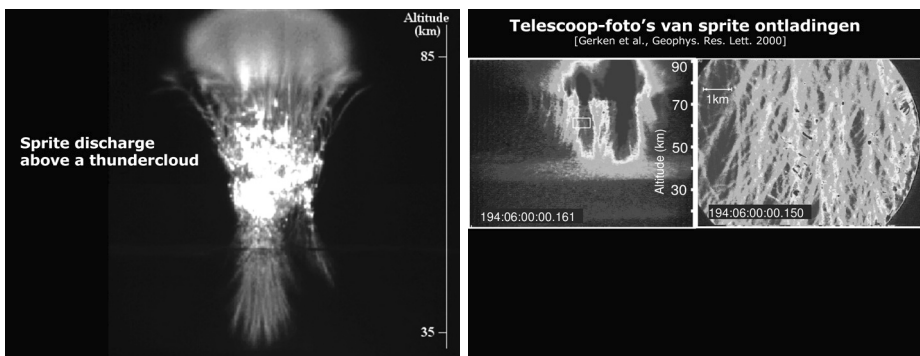
Deze verschijnselen heeft men namen gegeven als 'sprites', 'elves', 'blue jets' en 'pixies'. Als je toch niet weet wat voor verschijnselen het zijn, kun je net zo goed wat fantasie gebruiken bij de naamgeving.

Al deze lichtverschijnselen zijn het gevolg van gasontladingen. Het basismechanisme dat hiervoor verantwoordelijk is werkt als volgt. Tussen de onweerswolk en de grond en tussen de wolk en de ionosfeer is een potentiaalverschil en dus een elektrisch veld. In de lucht zijn altijd wel wat vrije elektronen en ionen aanwezig (bijvoorbeeld ten gevolge van kosmische straling) en deze worden versneld in dat veld. Wanneer een elektron hard genoeg gaat, kan het een stikstofmolecuul ioniseren; bij deze botsing komt er een extra elektron vrij alsmede een N_2^+ ion. Op deze manier krijgen we een lawine van elektronen. Die zijn zelf niet te zien, maar naast dat ze moleculen ioniseren, kunnen ze ook moleculen aanslaan (een elektron uit de buitenste schil van het molecuul in een hogere energietoestand brengen). Wanneer zo'n molecuul terugvalt naar de grondtoestand, zendt het een foton uit. En dat zijn de fotonen die waargenomen kunnen worden. Nu is natuurlijk de vraag of een dergelijk eenvoudig mechanisme verantwoordelijk kan zijn voor de grote verscheidenheid aan patronen in Figuur 1.

In de volgende paragrafen gaan we kijken in hoeverre we die vraag kunnen beantwoorden. Allereerst gaan we kijken of we ook experimenteel vat kunnen krijgen op deze verschijnselen. Vervolgens proberen we een wiskundig model op te stellen vanuit de microscopische vergelijkingen van het elektromagnetisme. Tenslotte moeten we de wiskundige vergelijkingen die uit dit model volgen oplossen en kijken of de oplossingen inderdaad lijken op de waargenomen patronen.

2. Van waarnemingen naar experiment

Laten we eens wat beter kijken naar een 'sprite'ontlading.



Figuur 2. Twee opnames van sprite-ontladingen. Zie pagina 142 voor een kleurenillustratie.

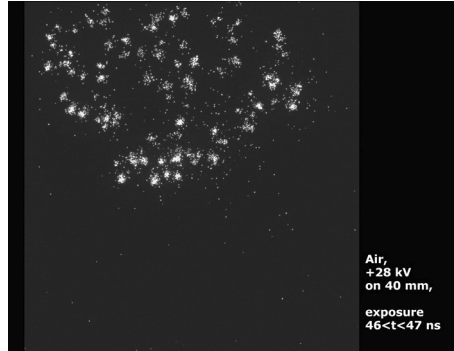
Wanneer we inzoomen, zien we dat een sprite opgebouwd is uit een groot aantal kanaaltjes, zogenaamde streamers. Willen we het hele object begrijpen, dan moeten we dus eerst deze streamers begrijpen. Maar hoe kunnen we ooit zo'n enorm grote ontlading in een laboratorium bestuderen? Hier worden we geholpen door de schaling. Hoger in de lucht is de dichtheid lager, op 70 km een factor 10^5 . Dat betekent, dat het veel langer duurt voor moleculen tegen elkaar botsen. De vrije weglengte is een factor 10^5 groter. Maar afstanden worden gemeten in termen van deze vrije weglengte: het maakt niet uit hoeveel meter een deeltje heeft afgelegd, het aantal vrije weglengtes is van belang. Zaken liggen op het aardoppervlak veel dichter bij elkaar dan hoog in de lucht en wel een factor 10^5 . En dat betekent, dat een kilometersgrote ontlading hoog in de lucht slechts centimeters groot is op het aardoppervlak. Er zit echter wel een addertje onder het gras. De relevante energieschaal is de ionisatie energie van stikstof; die schaalt niet. Dit betekent dat snelheden ook niet schalen (de kinetische energie van de elektronen schaalt niet). Dat betekent, dat gebeurtenissen niet alleen veel groter zijn op 70 km hoogte, maar ook veel langer duren. (Het quotiënt is immers constant). En dus zijn de gebeurtenissen in het lab veel sneller dan in de lucht. Een gasontlading van een seconde doet er in het lab maar een paar microsecondes over.

Dit stelt hoge eisen aan de experimenten. Voor het maken van foto's van de ontladingen is een camera nodig die in een nanoseconde een foto kan maken. In Figuur 3 zien we de opstelling. Tussen de naald boven en de plaat beneden wordt een hoog elektrisch veld aangelegd. In principe kan de samenstelling en de druk van het gas in de kamer gekozen worden, meestal wordt omgevingslucht gebruikt. Door het hoge veld vindt een gasontlading plaats; hiervan wordt een foto genomen. En dan krijgen we het volgende resultaat: een streamer die van boven naar beneden loopt; het hele kanaal lijkt licht te geven. Maar is dat wel wat er echt aan de hand is?



Figuur 3. Opstelling en resultaten van de experimenten. Zie pagina 142 voor een kleurenillustratie.

Als we de belichtingstijd van de camera verkorten, zie Figuur 4, zien we alleen nog maar een aantal lichtgevende spots. Alleen de voorkant van het kanaal geeft licht. Doordat we in Figuur 3 een langere belichtingstijd hadden, hebben we eigenlijk een aantal foto's bij elkaar geteld, waarbij het kanaal steeds verder propageerde.



Figuur 4. Nu met een kortere belichtingstijd. Zie pagina 142 voor een kleurenilustratie.

Als we dus een nog kortere belichtingstijd zouden kunnen nemen, zouden we dus steeds smallere spots zien. Natuurlijk zouden we graag een video-opname van het experiment maken om te controleren of het inderdaad de voorkant is, die als enige lichtgeeft. De camera die deze snapshots maakt, heeft seconden nodig (door het uitlezen van de data naar de computer) voor een nieuw snapshot gemaakt kan worden. Een serie snapshots (en dus een video-opname) kunnen we zo dus vergeten.

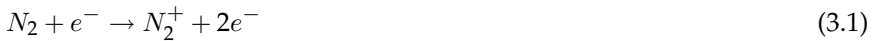
Nu hebben we dus al een beter beeld van wat een streamer is: een propagerend kanaaltje waarvan alleen de kop actief is (alleen daar zijn vrije elektronen). Kunnen we dit ook theoretisch begrijpen?

3. Van microscopische vergelijkingen naar een wiskundig model

In deze paragraaf gebruik ik analyse van vectorvelden en scalaire velden; een beknopte samenvatting van de belangrijkste resultaten die ik hiervan gebruik staat in paragraaf 7. Elektrisch veld en dichtheden zijn immers vector/scalaire grootheden die van (x, y, z) en de tijd afhangen. Daarom wordt ook gebruik gemaakt van partiële afgeleides, bijvoorbeeld $\frac{\partial n_e}{\partial t}$. Dit is de afgeleide naar de tijd, waarbij de andere variabelen constant beschouwd worden.

Wanneer dit te ver voert, kunt u ook alles eendimensionaal beschouwen; vectorfuncties worden dan scalaire functies en de operator ∇ wordt dan $\frac{\partial}{\partial x}$. In dit geval worden partiële afgeleides 'normale' afgeleides naar plaats of tijd.

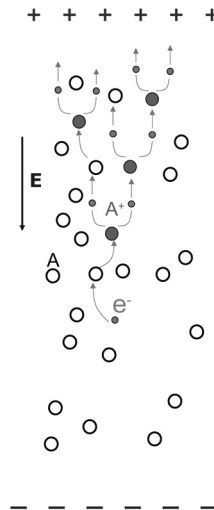
Laten we kijken of we de propagatie van streamers kunnen begrijpen met zo min mogelijk ingrediënten. In de experimenten hebben we twee parallelle platen waartussen een grote spanning wordt aangelegd. In het model moeten dus zeker het elektrisch veld \vec{E} en/of de potentiaal ϕ een rol gaan spelen. Verder kan de samenstelling van het gas gekozen worden; laten we beginnen met te kijken naar pure stikstof. Dan hebben we elektronen en ionen nodig. We schrijven n_e voor de elektronendichtheid en n_+ voor de dichtheid van de N_2^+ ionen. Hier komt dus een aanname in het model; we nemen alleen de reactie



mee. Eigenlijk zouden we de N_2 dichtheid ook moeten meenemen, omdat die afneemt door bovenstaande reactie. De stikstof is echter in overmaat aanwezig en kan dus als constant beschouwd worden.

Fast processes in the ionization front:

10^{-9} m: Electrons drift and diffuse in local \mathbf{E} -field.
 Elastic, inelastic and ionizing collisions with neutral molecules.
 Degree of ionization $< 10^{-4}$.



Figuur 5. Illustratie van de elektronenlawine.

Nu moeten we de wetmatigheden zoeken die n_e, n_+, \vec{E} en ϕ aan elkaar relateren. Het is handig om de elektronenstroomdichtheid \vec{J} te introduceren; die voldoet aan de wet van Ohm:

$$\vec{J} = n_e \vec{E}. \tag{3.2}$$

(dit is niet de gebruikelijke vorm $V = IR$ maar komt op hetzelfde neer in een draad met oppervlak A en lengte L ; $I = JA$, $V = LE$ en $R = L/An_e$.) De elektronen zijn veel lichter dan de ionen en stromen dus veel sneller; we

nemen aan dat de ionen niet stromen tijdens het proces en schrijven voor de ionenstroomdichtheid $\vec{J}_+ = 0$.

Nu gebruiken we de eerste wetmatigheid uit de natuurkunde: behoud van elektronen. Zou er geen creatie van elektronen zijn, dan geldt:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{J} = 0. \quad (3.3)$$

Hier staat in feite, dat de afname van de lading gelijk is aan de stroom. Aangezien de reactie (3.1) extra elektronen-ionen paren genereert is de rechterkant van vergelijking (3.3) niet nul; er is een bron van nieuwe elektronen. We moeten dus hebben

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{J} = \text{bron}. \quad (3.4)$$

Eenzelfde soort vergelijking hebben we voor de ionen. Iets eenvoudiger aangezien ze niet stromen en met dezelfde bron (elektronen en ionen worden in paren gecreëerd: behoud van lading):

$$\frac{\partial n_+}{\partial t} = \text{bron}. \quad (3.5)$$

Nu moeten we een uitdrukking vinden voor de bron: hoeveel extra elektronen worden er gegenereerd bij gegeven aantal en veld? Dit is een complex proces, maar we weten zeker dat de bron nul is in afwezigheid van ofwel \vec{E} of n_e . Deze bronterm is experimenteel gemeten voor verschillende waarden; de uitkomsten blijken goed gefit te kunnen worden door de formule:

$$\text{bron} = n_e |\vec{E}| e^{-1/|\vec{E}|}. \quad (3.6)$$

Hier staat in feite het product van de elektronen stroom $n_e |\vec{E}|$ en de kans dat er ionisatie plaatsvindt $e^{-1/|\vec{E}|}$. En nu lijken we klaar te zijn; de beginvoorwaarde, het externe elektrische veld, bepaalt de bronterm (3.6) waardoor de PDE's voor de elektronen (3.4) en ionen (3.5) volledig vastliggen. Er zit echter een addertje onder het gras. Aanvankelijk is deze benadering wel goed, maar gedurende het proces worden er steeds meer vrije ladingen gecreëerd, en die wijzigen het elektrische veld. We moeten oplossen

$$\nabla \cdot \vec{E} = n_+ - n_e. \quad (3.7)$$

(zie weer paragraaf 7 voor de afleiding van deze vergelijking). Voor lage ladingdichtheden geeft dit wel het constante achtergrondveld, maar voor hoge dichtheden zal deze vergelijking meegenomen moeten worden. Tenslotte werken we in de elektrostatische benadering. Magneetvelden (die wel degelijk aanwezig zijn door de stromende lading) kunnen verwaarloosd worden. Dat betekent dat we ook hebben

$$\vec{E} = -\nabla \phi \quad (3.8)$$

Samenvattend hebben we:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} - \nabla \cdot (n_e \vec{E}) = n_e |\vec{E}| e^{-1/|\vec{E}|}, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial n_+}{\partial t} = n_e |\vec{E}| e^{-1/|\vec{E}|}, \quad (3.10)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = n_+ - n_e, \quad (3.11)$$

$$\vec{E} = -\nabla \phi. \quad (3.12)$$

4. Oplossen van het model

Op het eerste gezicht lijkt het niet lastig het model (3.9)-(3.11) op te lossen. Gegeven een achtergrondveld en een beginconfiguratie van de lading (bijvoorbeeld een enkel elektron) kan via vergelijking (3.11) het gewijzigde elektrische veld uitgerekend worden. Vervolgens kunnen nieuwe ladingsdichtheden berekend worden met de vergelijkingen (3.9) en (3.10) en kunnen we weer terug naar de eerste stap. We lopen echter tegen allerlei problemen aan. Ten eerste blijkt een volledige 3D simulatie erg moeilijk; we nemen aan dat de streamer cilindrisch symmetrisch is en gebruiken de coördinaten r en z . Wanneer dit op de computer gezet wordt krijgen we de volgende serie plaatjes. In de drie plaatjes links staan achtereenvolgens elektronendichtheid, netto lading en elektrisch veld. We zijn met een elektron in de oorsprong begonnen en we zien dat er een lawine aan elektronen is ontstaan die tegen de richting van het elektrisch veld in propageert. Het elektrisch veld wijkt nu nog niet veel af van het achtergrondveld, zie Figuur 6.

Laten we de simulatie verder lopen, dan zien we dat de streamer verder naar boven propageert en dat er een dun ladingslaagje aan de voorkant ontstaat. Ook zien we dat daar het veld fors verschilt van de achtergrondwaarde, zie Figuur 7.

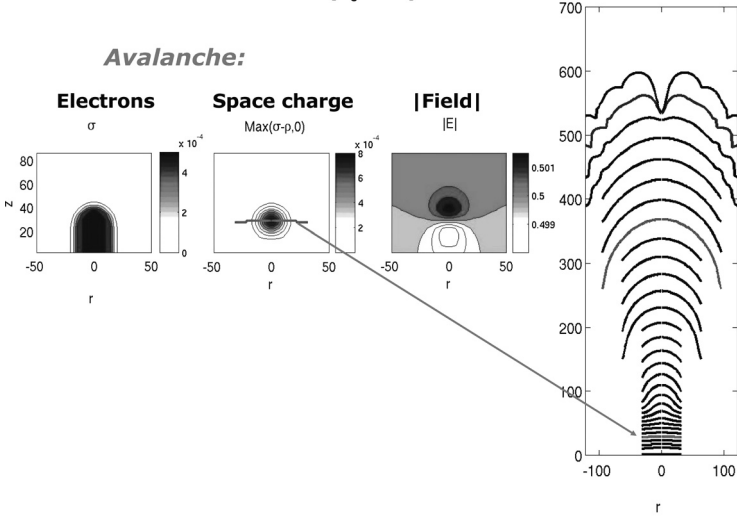
Laten we de simulatie nu nog verder lopen, dan wordt het veld nog hoger en splitst de streamer zich spontaan, zie Figuur 8.

Hierna houdt de code ermee op, zijn de resultaten niet meer betrouwbaar. Op het plaatje aan de rechterkant staat de plaats en de vorm van de voorkant van de streamer op verschillende tijdstippen.

5. Theoretisch begrip

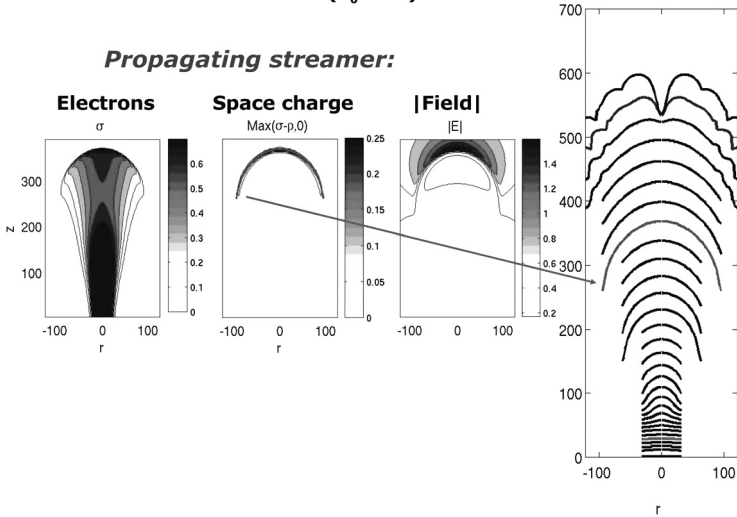
Waarom wordt het gladde oppervlak aan de voorkant van de streamer nu ineens zo bobbelig en oneffen? Dit lijkt verrassend, maar soortgelijke patronen zijn bekend uit andere takken van de natuurkunde, zoals zich vertakkende

Phases of streamer propagation ($E_0=0.5$)



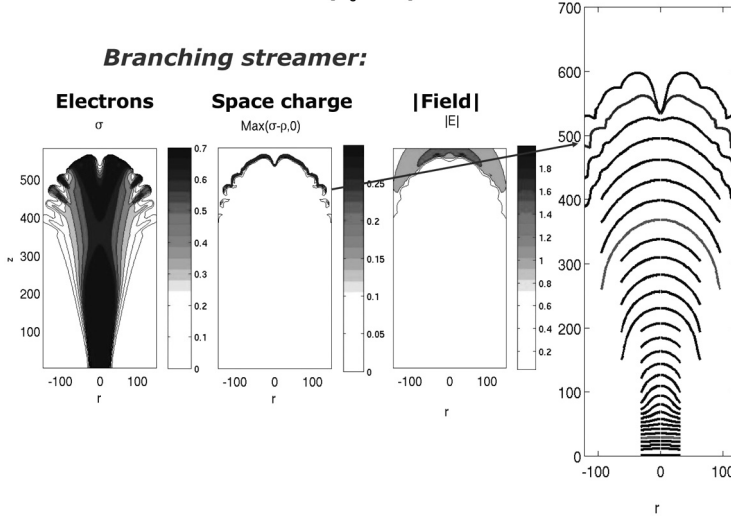
Figuur 6. Numerieke simulatie, eerste snapshot.

Phases of streamer propagation ($E_0=0.5$)



Figuur 7. Numerieke simulatie, tweede snapshot.

Phases of streamer propagation
($E_0=0.5$)



Figuur 8. Numerieke simulatie, derde snapshot.

sneeuwvlokken. Het volgende is namelijk aan de hand. In de bulk van de streamer is inmiddels zoveel lading aanwezig, dat die bulk geleidend is geworden. Geen elektrisch veld aanwezig, dus is de potentiaal constant. Voor de streamer zijn geen ladingen aanwezig en dus geldt

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \tag{5.1}$$

of in termen van de potentiaal

$$\nabla^2 \phi = 0. \tag{5.2}$$

Verder wordt de snelheid, waarmee de ene regio (geleidend) de andere regio (leeg) binnendringt door de grote van het lokale elektrische veld. Een dergelijke situatie leidt tot een zogenaamde ‘Laplacian instability’; kleine bobbel aan de voorkant van de streamer gaan harder groeien (steiler, dus hoger veld, dus sneller) dan hun burens en worden dus steeds groter. De voorkant wordt dus steeds bobbeliger en tenslotte splitst de streamer zich. Deze situatie van het groeien van oneffenheden wordt een ‘instability’ genoemd, vergelijking (5.2) wordt de Laplace vergelijking genoemd, vandaar de naam voor dit soort instabiliteiten.

6. Conclusies en vragen

In hoeverre zijn deze numerieke resultaten betrouwbaar? Is het eenvoudige model inderdaad al instaat propagatie en splitsing van streamers te verklaren? De resultaten lijken bemoedigend. Dit was het punt waar ik mijn promotieonderzoek begon, met als doel om ook analytisch vat te krijgen op het

streamerprobleem. Dat werk voerde veel te ver om hier te behandelen, maar lijkt de numerieke resultaten te ondersteunen. En zo is er een bemoedigend begin gemaakt met het begrijpen van de patronen in Figuur 1, maar hebben we ook nog een lange weg te gaan.

7. Analyse van scalarvelden en vectorvelden

Op het internet of in een boek over vector calculus kunt u al het onderstaande veel uitgebreider terugvinden; ik vat de belangrijkste resultaten die ik nodig heb hier samen.

Een scalarveld is een afbeelding $f(\vec{x})$ van \mathbb{R}^n naar \mathbb{R} .

Een voorbeeld van een scalarveld is de dichtheid van een object $\rho(x, y, z)$ en de temperatuur $T(x, y, z)$; dit zijn afbeeldingen van \mathbb{R}^3 naar \mathbb{R} . Een vectorveld is een afbeelding $\vec{F}(\vec{x})$ van \mathbb{R}^n naar \mathbb{R}^n .

Een voorbeeld van een vectorveld is het snelheidsveld $\begin{pmatrix} v_x(x, y, z) \\ v_y(x, y, z) \\ v_z(x, y, z) \end{pmatrix}$; dit is

een afbeelding van \mathbb{R}^3 naar \mathbb{R}^3 .

Wij gebruiken de scalaire velden $n_e(x, y, z), n_+(x, y, z)$ en $\phi(x, y, z)$ en de vectorvelden $\vec{E}(x, y, z)$ en $\vec{J}(x, y, z)$.

7.1. Differentiëren

We definiëren de gradiënt van een scalair veld als volgt

$$\nabla\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{pmatrix}. \tag{7.1}$$

De gradiënt ('afgeleide') van een scalair veld is dus een vector veld. We definiëren de divergentie van een vectorveld als volgt:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \tag{7.2}$$

en levert dus een scalair veld op. Wanneer we deze twee combineren krijgen we de divergentie van de gradiënt van een scalair veld, ook wel de Laplaciaan genoemd:

$$\nabla \cdot (\nabla\phi) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}, \tag{7.3}$$

notatie $\nabla^2\phi$, of ook wel eens $\Delta\phi$.

7.2. Integratie van een vectorveld

Gegeven een object E met oppervlak S in de \mathbb{R}^3 . Stel dat we een stromingsveld (van bijv. water) \vec{v} hebben; dan wordt de hoeveelheid water die door S stroomt de flux genoemd; deze flux kan berekend worden met behulp van een integratie over dit oppervlak:

$$\text{flux} = \int \int_S \vec{v} \cdot d\vec{A}. \quad (7.4)$$

Een standaardstelling uit de analyse geeft

$$\int \int_S \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int \int \int_E \nabla \cdot \vec{v} \, dV. \quad (7.5)$$

Vergelijk met de hoofdstelling van de analyse:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) \, dx. \quad (7.6)$$

Aan de linkerkant staat de functie op de rand van het domein, aan de rechterkant de afgeleide binnen het domein, net als in vergelijking (7.5). Wij gebruiken deze vergelijking met het vectorveld \vec{J} ; de flux is in dit geval de lading die wegstroomt door een oppervlak S :

$$\text{flux} = \int \int \int_E \nabla \cdot \vec{J} \, dV. \quad (7.7)$$

Deze flux moet gelijk zijn aan de afname van de elektronen in dit gebied:

$$\text{afname lading} = \int \int \int_E \frac{\partial n_e}{\partial t} \, dV. \quad (7.8)$$

Wanneer we deze gelijkstellen, krijgen we

$$\int \int \int_E \frac{\partial n_e}{\partial t} \, dV = \int \int \int_E \nabla \cdot \vec{J} \, dV \quad (7.9)$$

en aangezien dit voor een willekeurig object E moet gelden, krijgen we

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{J}. \quad (7.10)$$

Op soortgelijke wijze kan vergelijking (3.7) afgeleid worden. We weten dat voor een puntlading q geldt

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} \vec{r}. \quad (7.11)$$

Hieruit volgt direct de wet van Gauss:

$$\int \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = q \quad (7.12)$$

en op dezelfde wijze, aangezien de lading

$$q = \int \int \int_E (n_+ - n_e) \, dV \quad (7.13)$$

krijgen we

$$\int \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int \int \int_E \nabla \cdot \vec{E} \, dV = q = \int \int \int_E (n_+ - n_e) \, dV. \quad (7.14)$$

Dit moeten weer voor een willekeurig volume E gelden en dus krijgen we weer

$$\nabla \cdot \vec{E} = n_+ - n_e. \quad (7.15)$$

Complexe dynamica

Jan Wiegerinck

Korteweg-de Vries Instituut, Universiteit van Amsterdam

Introductie

Complexe dynamica gaat over het *itereren*, dat wil zeggen het herhaald uitvoeren van een complex differentieerbare functie of afbeelding. Complex differentieerbare afbeeldingen vormen een groot en belangrijk onderwerp in de wiskunde, veel te groot voor een zomercursus! Daarom gaan we ons zoveel mogelijk beperken tot complexe polynomen en rationale functies (dat zijn quotiënten van polynomen). Zelfs het itereren van polynomen van graad 2 leidt al tot zeer verrassende en moeilijke wiskunde. Eerlijk gezegd is deze wiskunde in zijn details veel te moeilijk voor een zomercursus en zeker als het idee van de cursus is om ideeën voor wiskunde D op te doen. Zelfs iteratie van polynomen leidt onvermijdelijk tot het bestuderen van complex differentieerbare functies die veel algemener dan polynomen zijn. Je moet gewend zijn aan ingewikkelde wiskundige redeneringen en goed onderlegd zijn in functietheorie, zeg op masterniveau, om helemaal te kunnen genieten van de fraaie argumentaties en constructen in de complexe dynamica.

Hiermee is het dilemma voor deze syllabus geschetst. Wiskunde wordt leuker en interessanter naarmate je beter begrijpt hoe het werkt, maar de weg daarnaartoe is lang en moeizaam, er bestaan geen sluiproutes of stoeltjesliften die je voor niets laten ervaren waar de grootste wiskundigen al hun inspanningen aan hebben gewijd.

Mijn oplossing is dat ik de syllabus gelaagd heb opgebouwd. Ik hoop dat het eerste hoofdstuk over reële iteratie voor iedere wiskunde docent goed begrijpbaar is, en wie weet is er iets leuks uit te halen voor een wiskunde D onderdeel of voor een profielwerkstuk. De volgende hoofdstukken gaan we het complexe vlak in, dat betekent al dat het voor veel cursisten betrekkelijk onbekend terrein zal zijn. Er worden veel concepten geïntroduceerd en ik probeer aan te geven hoe je over die zaken moet denken, kortom een intuïtief beeld te schetsen. Dit doe ik aan de hand van een aantal stellingen meestal zonder bewijs. Waar mogelijk probeer ik het waarom van die stellingen aan te geven aan de hand van (onvolledige) schetsen van de argumenten, die iets van de mooie (en dus moeilijke) wiskunde laten zien. Vaak staan er uitspraken in als 'nu is zus gelijk aan zo', en vaak berust het bewijs daarvan op complexe functietheorie. Ik kan daar in deze syllabus niets over zeggen, en doe er dan ook het zwijgen toe. Ik kan me goed voorstellen dat de schetsen sommige cursisten boven de pet gaan, misschien wel omdat ze zeer onvolledig zijn.

Sla die stukjes dan gewoon over! De lezer die een echte studie van complexe dynamische systemen wil maken en de harde bewijzen wil zien, verwijs ik naar de boeken van (in opklimmende moeilijkheidsgraad) Devaney, Milnor en Carleson & Gamelin [1, 2, 3].

Je kunt je afvragen waarom je complexe polynomen wilt bestuderen en niet gewoon reële functies. Inderdaad, zelfs dat is een lastig onderwerp en biedt genoeg stof voor een leuke cursus. We zullen ook beginnen met iets over itereren van reële functies te zeggen. Maar polynomen zijn ‘makkelijke’ functies die echter wel van nature op de complexe getallen leven; stellingen over polynomen zijn strak en nog strakker als we in de complexe getallen werken. Denk aan de stelling dat ieder polynoom van graad n in n lineaire factoren (met complexe coëfficiënten) kan worden ontbonden. Misschien is voor de liefhebber nog belangrijker dat de plaatjes die bij complexe dynamica horen veel indrukwekkender zijn dan wat je in het reële geval te zien krijgt.

De bibliografie is met opzet beperkt tot drie leerboeken. Referenties naar de bronnen zijn daar in te vinden. Het leek mij dat een uitgebreide referentielijst niet strookt met het doel van de cursus. De plaatjes zijn deels gemaakt met XAOS, een mooi programma dat allerlei fractalen kan genereren. Een ander deel is met MAPLE gemaakt. Het voordeel voor een wiskundige is dat je met MAPLE precies specificeert wat je tekent. Ik ben dan bereid de soms niet helemaal fantastische weergave voor lief te nemen.

Tenslotte, deze syllabus is niet een uitgebreide samenvatting van de cursus. Het is mijn bedoeling dat er in de cursus op een ontspannen manier een aantal zaken die met complexe dynamica verband houden, aan de orde komen. In de syllabus vind je deze zaken en nog wat meer in een iets serieuzere, wiskundige context terug.

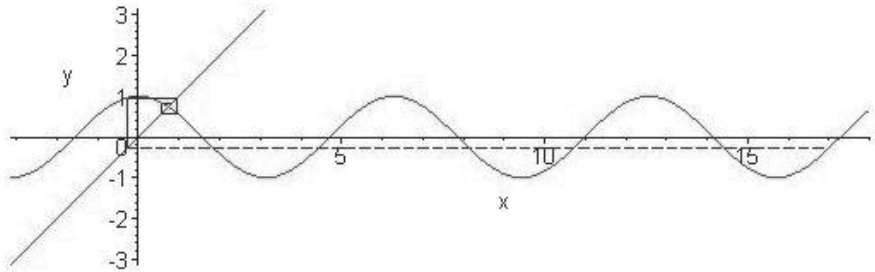
Jan Wiegerinck

1. Iteratie

1.1. Iteratie op \mathbb{R}

Wie een grafische rekenmachine bezit heeft vast wel eens geprobeerd wat het effect van het itereren van de cosinus is. Je start met een getal, bijvoorbeeld 17, rekent uit $\cos 17, \cos(\cos(17)), \cos(\cos(\cos(17))), \dots$, na een keer of 10 herhalen kom je uit op 0,7390851332, en daarna verandert er niets meer. als je met 357 start gebeurt hetzelfde, en je komt eigenaardig genoeg op dezelfde waarde uit. Zie Figuur 1.

Voor een deel is dit eenvoudig te verklaren: 0,7390851332 is bijna een *vast punt* van de functie cosinus. Mijn rekenmachine geeft $\cos(0,7390851332) = 0,7390851332$. We noemen x_0 een vast punt van de functie f als $f(x_0) = x_0$. Het is duidelijk dat wanneer we eenmaal in een vast punt zitten, we daar zullen blijven. In het geval van de cosinus is er één vast punt, de vergelijking $\cos x = x$ heeft precies één oplossing. Blijkbaar komen we bij het itereren van de cosinus altijd in de buurt van dat vaste punt terecht. We zullen snel zien



Figuur 1. Iteratie van de cosinus, start in 17.

dat dat voor andere functies heel anders kan zijn. Eerst enige terminologie. In de volgende definitie is X een verzameling, meestal een deel van \mathbb{R} of \mathbb{C} .

DEFINITIE 1.1 *Zij f een functie van X naar X en $x \in X$. Met f^n noteren we de functie*

$$f^n = f \circ f \circ \dots \circ f, \quad (n \text{ keer}).$$

- De (voorwaartse) baan van x is de verzameling punten

$$x, f(x), f^2(x), \dots$$

- Het punt x heet vast punt van f als $f(x) = x$.
- Het punt x heet periodiek punt met periode n als $f^n(x) = x$. De baan van een periodiek punt heet een periodieke baan.
- Het bassin van aantrekking van een vast punt x is de verzameling van alle $y \in X$ zo dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) = x.$$

We noteren dit met \mathcal{A}_x .

- Het bassin van aantrekking van een periodieke baan

$$\{x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\}$$

met periode n is de vereniging van de bassins van aantrekking van de vaste punten $f^j(x_0)$ onder de afbeelding f^n .

Het is niet zo dat ieder vast punt x een bassin van aantrekking heeft dat uit meer punten dan x bestaat. Dit zien we in de volgende sectie.

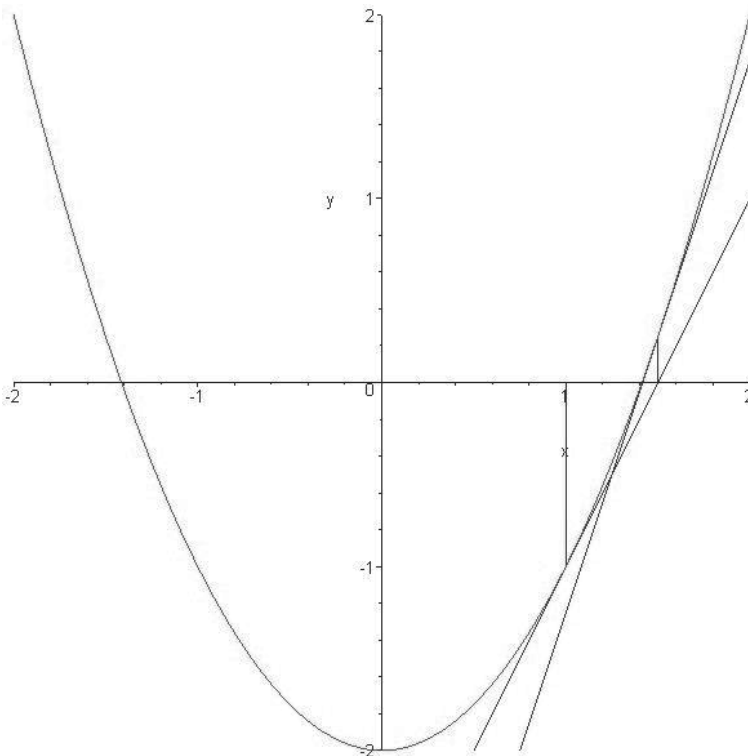
1.2. Newton Raphson

De methode van *Newton Raphson* om nulpunten van een functie op \mathbb{R} te vinden is een mooi voorbeeld van een iteratief proces. Het aardige is dat je de methode ook in de complexe getallen kan uitvoeren, al is hij dan minder makkelijk meetkundig voor te stellen. Een bekend verhaal binnen de complexe dynamica is dat Douady, die belangrijke bijdragen aan de complexe dynamica heeft geleverd, in het onderwerp geïnteresseerd raakte toen een student hem vroeg wat er gebeurt als je Newton Raphson complex probeert te doen.

De methode bestaat uit het herhalen van de STAP hieronder, totdat de invoer en de uitvoer van de stap (ongeveer) gelijk zijn. Laat f een differentieerbare functie op \mathbb{R} zijn en x_0 een punt in \mathbb{R} .

STAP: Bepaal de raaklijn l aan de grafiek van f in het punt $(x_0, f(x_0))$. Bepaal het snijpunt s van l met de x -as. Neem dit punt als nieuwe x_0 .

Zie Figuur 2.



Figuur 2. Newton-Raphson methode voor $x^2 - 2$, start in $x = 1$.

Een kleine berekening leert dat de raaklijn l gegeven wordt door

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Het snijpunt met de x -as is

$$s = x_0 + \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

De methode van Newton Raphson is dus het itereren van de functie

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \tag{1.1}$$

We zien onmiddellijk dat een nulpunt van f een vast punt F is, en omgekeerd. Laten we dit vaste punt analyseren. De afgeleide van F in het vaste punt speelt een grote rol. Een kleine berekening (onder de aanname dat f twee keer differentieerbaar is) geeft

$$F'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f''(x)f(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2}.$$

In een enkelvoudig nulpunt x_0 van f (i.e. $f(x_0) = 0$, maar $f'(x_0) \neq 0$) zal dus de afgeleide $F'(x_0) = 0$. Dit is bijzonder gunstig, gezien de volgende stelling. Als het nulpunt meervoudig is, is de afgeleide moeilijker uit te rekenen. Bijvoorbeeld, voor $f(x) = x^n$ vinden we in 0 dat $F'(0) = n(n-1)/n^2 = 1 - 1/n$, en met enige moeite kan men zien dat een functie als $f(x) = e^{-1/x^2}$ leidt tot een F met $F'(0) = 1$.

STELLING 1.2 *Laat f een differentieerbare functie zijn op \mathbb{R} , x_0 een vast punt van f en veronderstel dat $|f'(x)| \leq C < 1$ voor x in een interval $I = [x_0 - a, x_0 + a]$. Dan is I bevat \mathcal{A}_{x_0} . Er geldt*

$$|f(x) - x_0| \leq C|x - x_0|, \quad x \in I. \tag{1.2}$$

Als $f'(x_0) = 0$ en f is twee keer differentieerbaar met tweede afgeleide $< M$, dan geldt zelfs:

$$|f(x) - x_0| \leq \frac{M}{2}(x - x_0)^2. \tag{1.3}$$

Bewijs. We nemen $x \in I$ en beginnen met (1.2). Bedenk dat $f(x_0) = x_0$.

$$\begin{aligned} |f(x) - x_0| &= |f(x) - f(x_0)| = \left| \int_{x_0}^x f'(t) dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |f'(t)| dt \leq C|x - x_0| \end{aligned} \tag{1.4}$$

Voor (1.3) schatten we iets preciezer met gebruikmaking van $f'(x_0) = 0$:

$$\begin{aligned} |f(x) - x_0| &= \left| \int_{x_0}^x f'(t) dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x \int_{x_0}^t f''(s) ds dt \right| = \\ &= \left| \int_{x_0}^x f''(s) \left(\int_s^x dt \right) ds \right| \leq \left| \int_{x_0}^x f''(s)(x - s) ds \right| \leq \frac{1}{2}M(x - x_0)^2 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Uit 1.2 leiden we nu af dat

$$|f^n(x) - x_0| \leq C|f^{n-1}(x) - x_0| \leq \dots \leq C^n|x - x_0|.$$

Omdat $|C| < 1$ gaat dit naar 0, als $n \rightarrow \infty$, dus $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0$. □

Merk op dat de snelheid van convergentie in geval (1.3) kwadratisch is in termen van de afstand tot het vaste punt, dat is veel sneller dan in geval (1.2) waar dit lineair is.

De conclusie is dat Newton Raphson iteratie in de buurt van een enkelvoudig nulpunt snel is, als je dicht genoeg bij het nulpunt begonnen bent.

Het standaardvoorbeeld is het berekenen (benaderen) van $\sqrt{2}$. We nemen $f(x) = x^2 - 2$. De Newton Raphson functie is dan

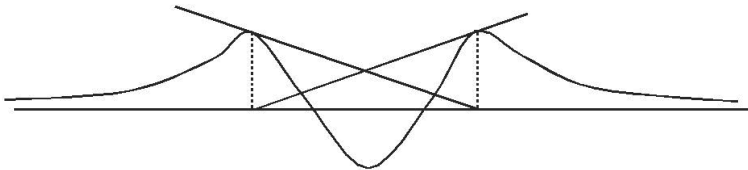
$$F(x) = x - (x^2 - 2)/2x.$$

Starten met 1 geeft achtereenvolgens

$$\frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}, \frac{665857}{470832} = 1,414213562.$$

Als f geen nulpunten heeft, kan Newton Raphson natuurlijk niet tot het vinden van een nulpunt leiden. Heeft f wel nulpunten, dan zou je kunnen denken dat Newton Raphson altijd tot het vinden van een nulpunt leidt, maar je kunt op twee manieren pech hebben: het proces komt terecht in een punt waar de raaklijn horizontaal is, dan weten we niet hoe verder te gaan. Zelfs als we geloven dat een horizontale lijn de x as in het oneindige snijdt, weten we niet of dat in $+\infty$ of $-\infty$ zal zijn, en is niet duidelijk hoe we verder moeten. In het complexe geval dat we in het volgend hoofdstuk bestuderen, kunnen we hier vaak een mouw aan passen.

Een andere manier waarop het mis kan gaan is dat de waarden die de stap oplevert blijven slingeren! Je kunt het proces wel doorzetten, maar dit leidt niet tot het vinden van een nulpunt. Zie Figuur 3.



Figuur 3. Newton Raphson leidt tot periodiek gedrag.

De stelling geeft aanleiding tot de volgende definitie.

DEFINITIE 1.3 Zij x_0 een vast punt van de reële differentieerbare functie f . We noemen x_0

- (i) aantrekkend als $|f'(x_0)| < 1$.

(ii) sterk aantrekkend als $f'(x_0) = 0$.

(iii) neutraal als $|f'(x_0)| = 1$.

(iv) afstotend als $|f'(x_0)| > 1$.

Merk bij 4 op dat de inverse afbeelding $g = f^{-1}$ in de buurt van x_0 bestaat. Nu is x_0 aantrekkend vast punt voor g en punten die door g naar x_0 worden 'getrokken', worden blijkbaar door f langs dezelfde weg teruggeduwd. Bij neutrale punten is van alles mogelijk.

1.3. Conclusie

De methode van Newton Raphson toegepast op een functie f leidt tot het vinden van een nulpunt x_0 van f precies dan als de startwaarde in het bassin van aantrekking van x_0 ligt. Meestal zullen niet alle startwaarden in een bassin van aantrekking van een nulpunt liggen. Het bassin van aantrekking van enkelvoudige nulpunten omvat altijd een klein interval om het nulpunt. Met een startwaarde binnen de interval is de convergentie dan ook snel!

2. Complexe dynamica

2.1. Naar het complexe vlak!

We stappen nu over naar het complexe vlak en gaan complex functies itereren. Voor complex differentieerbare functies is er een mooie theorie, die formeel heel erg op het reële geval lijkt. Voor een complex differentieerbare functie geldt bijvoorbeeld Taylor's formule (bedenk dat complex differentieerbare functies oneindig vaak differentieerbaar zijn, zie de cursus van Jan van der Craats).

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \tag{2.1}$$

als z voldoende dicht bij z_0 ligt. Ook integreren gaat van een leien dakje en er geldt ondermeer

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(z) dz. \tag{2.2}$$

Hier zijn a en b punten in het complexe vlak en integreren we over een pad Γ van a naar b waarop f gedefinieerd is. De integraal is een Riemann integraal, dus limiet van Riemann sommen

$$\sum_{j=1}^n f'(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}),$$

waar $z_0 = a$, $z_n = b$ en de punten z_j, ζ_j op het pad Γ liggen, net als in het reële geval. Het grote wonder is dat het blijkbaar niet uitmaakt hoe we het pad kiezen!

Met deze kennis kunnen we het vorige hoofdstuk nalopen. Vast punt en bassin van aantrekking blijven zinvolle begrippen en we vinden dat stelling 1.2 ook in het complexe vlak waar is, met formeel hetzelfde bewijs. Ook definitie 1.3 kan dan naar de complexe situatie worden overgezet.

Het bassin van aantrekking wordt nu een *open verzameling*. Een open verzameling wordt gedefinieerd door de eigenschap: als er een punt z in zit, dan zit er ook een klein schijfje met middelpunt z in.

Zelfs wanneer we precieze computerplaatjes van een verzameling in het vlak maken, kunnen we maar eindig veel punten een kleur geven, en een punt is dan eigenlijk een klein schijfje. Daarom kunnen we goed gebruik maken van het begrip *dicht*. Een verzameling A heet *dicht* in een verzameling B als geldt: Voor ieder punt z in B en ieder (klein) schijfje D om z is $A \cap D \neq \emptyset$. De rationale getallen liggen dicht in de reële getallen. Maar ook de rationale getallen waarvan de noemer een macht van 10 is, liggen dicht in de reële getallen.

We zullen ook het begrip *samenhangende verzameling* nodig hebben. Een verzameling K heet *splitsbaar* als er open verzamelingen U_1, U_2 bestaan met $K \subset U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $U_1 \cap K \neq \emptyset$, $U_2 \cap K \neq \emptyset$. K heet *samenhangend* als K niet splitsbaar is.

VOORBEELD 2.1 *Samenhangend zijn ondermeer:*

- Intervallen,
- Schijven,
- Cirkels.

Splitsbaar zijn:

- Twee punten,
- Twee parallelle lijnen,
- Twee open schijven die geen punt gemeenschappelijk hebben.

Een *component* C van K is een maximale samenhangende deelverzameling van K . Dat wil zeggen, $C \subset K$, C is samenhangend, en als C een echte deelverzameling is van $C_1 \subset K$, dan is C_1 splitsbaar. De verzameling K heet *totaal onsamenhangend* als de componenten van K uit een punt bestaan. De gehele getallen zijn totaal onsamenhangend, maar ook de rationale getallen zijn totaal onsamenhangend.

2.2. Het punt in oneindig

We zagen in het vorige hoofdstuk dat het handig is als we met oneindig (∞) kunnen manipuleren. Formeel analytisch gaat dat als volgt. We voegen één extra punt toe aan de complexe getallen, en noemen dit punt ∞ . We denken ons het punt oneindig ver weg, met andere woorden z ligt dicht bij ∞ als $|z|$ heel groot is. In tegenstelling tot het reële geval heeft $-\infty$ geen aparte betekenis, of eventueel $-\infty = \infty$. Rekenen met ∞ gaat zo:

- (i) Voor een complex getal a geldt $a + \infty = \infty$, $a/\infty = 0$.
- (ii) Als $a \neq 0$ $a \cdot \infty = \infty$, $a/0 = \infty$
- (iii) $0/\infty = 0$, $\infty/0 = \infty$
- (iv) $0 \cdot \infty$ en $\infty \cdot 0$ zijn ongedefinieerd.

Met limieten werken gaat vrij eenvoudig. Voor complexe a definiëren we: $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a$ dan en slechts dan als bij iedere $\varepsilon > 0$ er een $M > 0$ bestaat met $|z| > M \Rightarrow |f(z) - a| < \varepsilon$. Dit leidt tot de regels

- (i) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} = \infty$, $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} = 0$.
- (ii) Voor een complex getal a geldt

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{f(z)} = 0.$$

- (iii) Voor b complex of ∞ geldt

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = b \Leftrightarrow \lim_{w \rightarrow 0} f(1/w) = b.$$

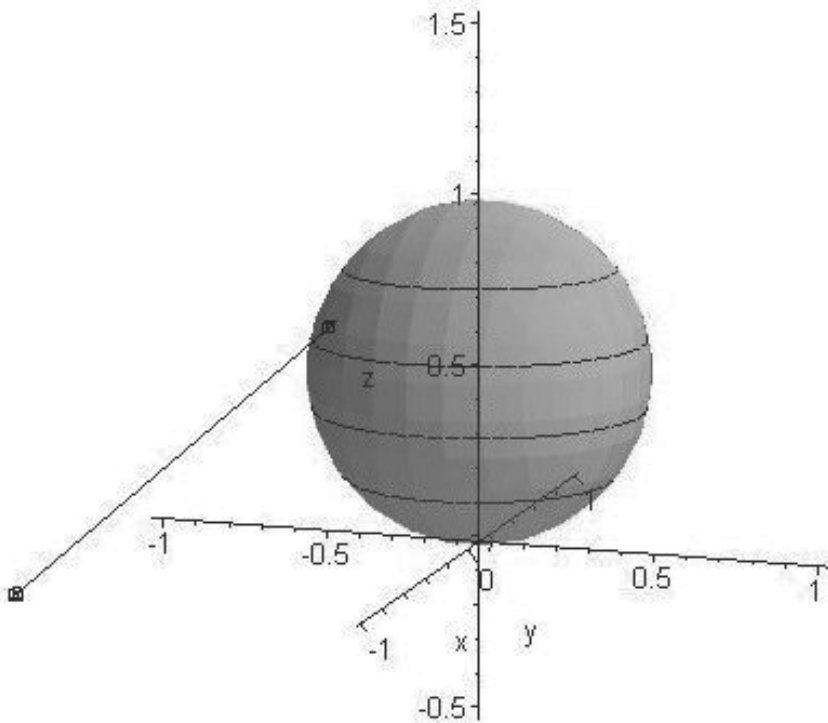
Meetkundig doen we het volgende. Identificeer het complexe vlak met het (x, y) -vlak in de driedimensionale ruimte met coördinaten (x, y, t) . Leg op dit vlak een sfeer (bolschil) met Zuidpool in $(0, 0, 0)$ en Noordpool in $(0, 0, 1)$. Ieder punt $(x, y, 0)$ van het (x, y) -vlak verbinden we met een rechte lijn met de Noordpool $(0, 0, 1)$. Deze lijn snijdt de sfeer in een punt. De punten van het vlak zijn in één-één correspondentie met de punten van de sfeer zonder de Noordpool. Het punt ∞ laten we met de Noordpool corresponderen. We zien dat als $z \rightarrow \infty$ in het complexe vlak, dan zal het corresponderende punt op de sfeer naar de Noordpool bewegen. Deze interpretatie van de sfeer als complexe vlak verenigd $\{\infty\}$ heet de *Riemannsfeer*. We geven deze met S aan.

2.3. Eenvoudige complexe dynamica op de Riemannsfeer S

Laten we even kijken wat er gebeurt in eenvoudig voorbeelden.

VOORBEELDEN 2.2 1. Bekijk de afbeelding $f : z \mapsto 3z$. Het is duidelijk dat $f^n(z) = 3^n z$. Vaste punten zijn 0 (afstotend, afgeleide > 1) en ∞ . Dit laatste punt is duidelijk aantrekkend. Een manier om de afgeleide zin te geven is ∞ naar 0 verplaatsen met $w = 1/z$. In termen van w ziet de afbeelding er zo uit $w = 1/z \mapsto 1/3z = 1/3w$; de afgeleide is in deze coördinaten $1/3$. Inderdaad een aantrekkend punt! We concluderen op dezelfde manier dat voor afbeeldingen van de vorm $z \mapsto az + g(z)$ met $g(\infty) = 0$ voldoende netjes ∞ een aantrekkend vast punt is als $|a| > 1$ en dat een zinvolle definitie van $f'(\infty) = 1/a$.

2. Bekijk de afbeelding $f : z \mapsto z^2$. Nu zijn 0 en ∞ sterk aantrekkende vaste punten (de $1/z$ truc werkt weer). Het bassin van aantrekking van 0 is $\{|z| < 1\}$ en van ∞ is het aantrekkend bassin $\{|z| > 1\}$. De cirkel $|z| = 1$ hoort niet tot een



Figuur 4. De Riemannsfeer S , een punt in \mathbb{C} en het bijbehorende punt op S . Zie pagina 139 voor een kleurenillustratie.

bassin van aantrekkling. De dynamica is daar ook niet eenvoudig, want 1 is vast punt en $f^n : e^{i\varphi} \mapsto e^{2^n i\varphi}$. Punten van de vorm $e^{i\pi/2^k}$ komen in k stappen op 1 terecht. Andere punten blijven min of meer random over de cirkel bewegen, $e^{i\pi/3}$ is periodiek met periode twee en ga maar door! De cirkel $\{|z| = 1\}$ een voorbeeld van een Juliaverzameling, en wel voor de afbeelding $z \mapsto z^2$. Merk op dat de Juliaverzameling in dit geval bijzonder glad is.

3. De afbeelding $f : z \mapsto az$ met $a = e^{2\lambda\pi i}$. Er geldt $f^n(z) = e^{2n\lambda\pi i}z$. Er zijn twee gevallen:

3a Als $\lambda = p/q$ is rationaal en we aannemen dat de breuk p/q niet vereenvoudigd kan worden, dan zal $f^q(z) = z$. Dus de afbeelding is periodiek en de periode is q . De baan van een punt bestaat uit q punten, die een gelijkzijdige q hoek vormen.

3b Als λ niet rationaal is zullen de punten $e^{2n\lambda\pi i}$ dicht liggen in de eenheidscirkel. We zullen dat nu niet bewijzen. Er zelfs iets sterkes waar: Voor iedere $\alpha \in \mathbb{R}$ is er een rijtje $\{n_j\}_j$ zo dat $f^{n_j}(z) \rightarrow e^{2\alpha\pi i}z$. Met andere woorden, een geschikt deelrijtje van geïtereerden convergeert naar rotatie over $2\pi\alpha$ radialen. En verder, voor ieder rijtje $\{n_j\}_j$ kun je een deelrijtje $\{n_{j_k}\}_k$ vinden zodat de geïtereerden $f^{n_{j_k}}$ naar een rotatie convergeren.

De baan van een punt z is een dichte deelverzameling van de cirkel om 0 met straal $|z|$. Er zijn deelrijtjes van geïtereerden die naar een willekeurige rotatie convergeren en ieder rijtje van geïtereerden heeft een deelrij die naar een rotatie convergeert.

2.4. Newton Raphson complex

We keren nu terug naar de *Newton Raphson* methode. De Newton Raphson functie F uit 1.1 kan ook in het complexe vlak worden geïnterpreteerd. We zoeken nu nulpunten van de bijbehorende complex differentieerbare functie f in het complexe vlak. De methode werkt op precies dezelfde manier. Het zal niet verbazen dat we om de nulpunten van f , dat is de vaste punten van F , bassins van aantrekking vinden. We geven een voorbeeld

VOORBEELD 2.3 *Newton Raphson voor $f(z) = z^2 - 1$. De bijbehorende functie die we willen itereren is*

$$F(z) = z - \frac{z^2 - 1}{2z} = \frac{z}{2} + \frac{2}{z}.$$

Een kleine berekening laat zien dat 1 en -1 sterk aantrekkende vaste punten zijn voor F . Dit volgt ook uit de complexe versie van Stelling 1.2. Verder is ∞ een afstotend vast punt, want de afgeleide in ∞ is 2!. Op grond van symmetrieoverwegingen verwacht je misschien dat rechter en linker halfvlak de bassins van aantrekking voor 1 en -1 zijn en dat de imaginaire as tot geen van de bassins van aantrekking behoort en gelijk is aan de Juliaverzameling. Bekijken we dit plaatje op de Riemannsfeer S , dan lijkt het erg op het plaatje dat (ook op S) bij z^2 hoort. Inderdaad, voor F correspondeert de imaginaire as op de Riemannsfeer met een grote cirkel door Noord- en Zuidpool, daarop ligt het afstotende vaste punt ∞ , en de aantrekkende punten zijn 1 en -1 . Voor z^2 vinden we iets soortgelijks, de cirkel $\{|z| = 1\}$ correspondeert met de evenaar, daarop ligt het afstotende punt 1 en de vaste aantrekkende punten zijn -1 en 1.

Nu is de afbeelding

$$\varphi(z) = \frac{z-1}{z+1} \quad z \in S \tag{2.3}$$

een (coördinaten)transformatie van S die de vaste punten van F naar die van z^2 stuurt en ook de (beoogde) Juliaverzamelingen naar elkaar afbeeldt. We hopen dus dat

$$z \mapsto w = \varphi(z) \mapsto w^2 \mapsto \varphi^{-1}(w) = z \mapsto \frac{z}{2} + \frac{2}{z}. \tag{2.4}$$

Dit kunnen we narekenen:

$$\varphi^{-1}(w) = \frac{w+1}{-w+1}.$$

Invullen in 2.4 geeft voor het linker lid

$$\frac{((z-1)/(z+1))^2 + 1}{-((z-1)/(z+1))^2 + 1} = \frac{(z-1)^2 + (z+1)^2}{-(z-1)^2 + (z+1)^2} = \frac{z}{2} + \frac{2}{z}. \tag{2.5}$$

De conclusie is dat, zoals verwacht, de bassins van aantrekking van -1 en 1 voor F het linker- respectievelijk rechter halfvlak zijn en de Juliaverzameling de imaginaire as is.

Je zou ook verwachten dat dit voor $x^3 - 1$, $x^4 - 1$ of andere polynomen net zo gaat, maar we zullen zo zien dat dit helemaal fout is!

VOORBEELD 2.4 De complexe Newton Raphson functie bij $x^3 - 1$ is

$$F(z) = z - \frac{z^3 - 1}{3z^2} = \frac{2}{3}z + \frac{1}{3z^2} \quad (2.6)$$

Superaantrekkende vaste punten zijn $1, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{3}}$. In deze punten is de afgeleide F' nul, maar de tweede afgeleide F'' niet. We merken allereerst op dat we vanwege de rotatiesymmetrie van $z^3 - 1$ ook rotatiesymmetrie voor de dynamica van F verwachten. Het vorige voorbeeld suggereert dat de halflijnen $\{\arg z = 1/3\pi, \pi, 5/3\pi\}$ het vlak in drie bassins van aantrekking verdelen. In het bijzonder ligt zou de negatieve x as tussen de bassins van $e^{2\pi i/3}$ en $e^{4\pi i/3}$ moeten liggen en "ver" van het bassin van 1 .

Bekijk eens de vergelijking

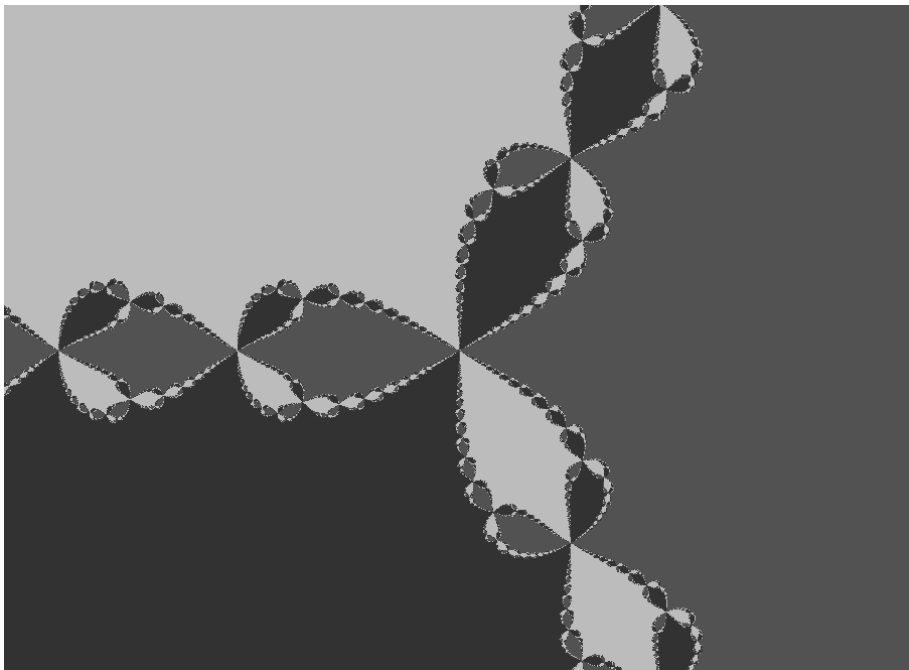
$$F(z) = z - \frac{z^3 - 1}{3z^2} = 1. \quad (2.7)$$

Vermenigvuldigen met z^2 geeft een derdegraads vergelijking. Omdat 1 een supraantrekkend vast punt is, zal 1 een dubbele oplossing van (2.7) zijn. Dan is de andere oplossing makkelijk te vinden, door $(z - 1)^2$ uit te delen. Het blijkt dat $z = -1/2$ de derde oplossing is. Nu is $F(-1/2) = 1$; wegens continuïteit van F wordt een klein schijfje om $-1/2$ afgebeeld binnen het bassin van aantrekking van 1 , maar betekent dat dit schijfje zelf binnen het bassin van aantrekking van 1 ligt. We kunnen dit herhalen, en kijken naar de oplossingen van $F(z) = -1/2$. Dit leidt weer tot een derdegraads vergelijking, die drie oplossingen heeft, alle drie in het bassin van aantrekking van het punt 1 . Een van die punten ligt weer op de negatieve x -as, tussen -1 en $-3/2$, dit kun je narekenen. De andere liggen geconjugeerd in het rechterhalfvlak, ruim buiten de sector $|\arg z| < \pi/3$.

Met de hand is nauwelijks verder te rekenen, maar een computerplaatje is bijzonder instructief, zie Figuur 2.4. De verschillende aantrekkende bassins zijn verschillend gekleurd.

OPMERKINGEN 2.5 Enige opmerkingen zijn op hun plaats

- (i) Voorbeeld 2.3 laat zien dat een coördinatentransformatie een iteratief proces in een gelijkwaardig maar veel 'doorzichtiger' proces kan omzetten. Zie ook stelling 3.4 hierna.
- (ii) Voorbeeld 2.2, de afbeelding z^2 , (en dus ook voorbeeld 2.3) heeft een bijzondere eigenschap 0 en ∞ zijn aantrekkende vaste punten en geen enkel ander punt wordt door z^2 op 0 of ∞ afgebeeld. De enige polynomen met deze eigenschap zijn van de vorm az^k , $a \neq 0$, k geheel en groter dan 1 . Een polynoom of rationale afbeelding kan niet meer dan twee van dit soort punten hebben.



Figuur 5. De Juliaverzameling bij Newton Raphson voor $x^3 - 1$. Zie pagina 139 voor een kleurenillustratie.

(iii) Voorbeeld 2.4 is typerend. De bassins van aantrekking voor de Newton Raphson afbeelding van polynomen met meer dan twee verschillende nulpunten zien er nooit 'netjes' uit.

3. Fatou- en Juliaverzameling

3.1. De definities

De *Fatouverzameling* van een rationale afbeelding f is de verzameling van punten waarop de geïtereerden f^n zich netjes gedragen. De *Juliaverzameling* van f is het complement van de Fatouverzameling. De Juliaverzameling van f wordt genoteerd met $J(f)$, kortweg J , deze is verreweg het interessantst. De Fatouverzameling wordt genoteerd met \mathcal{F} . Er geldt dus $\mathcal{F} = S \setminus J$.

Als we van bovenstaande beschrijving een definitie willen maken, moeten we uitleggen wat netjes betekent. In de voorbeelden zagen we Fatouverzamelingen die uit aantrekkende bassins bestaan. Op zo'n bassin convergeren de functies f^n naar een constante waarde, namelijk het vaste punt in het bassin. Convergentie van de geïtereerde functies f^n zouden we wel willen, maar het is iets teveel gevraagd. De voorbeelden 2.2, met name no. 3 laten zien wat nog netjes zou moeten zijn. De goede definitie vraagt om convergentie van deelrijen van geïtereerden en we moeten ook precies zijn over de manier van

convergentie.

DEFINITIE 3.1 *Zij f een rationale functie. Een punt z_0 zit in de Fatouverzameling \mathcal{F} van f als er een schijf $B = \{|z - z_0| < r\}$ bestaat met de eigenschap dat we uit ieder rijtje geïtereerden $\{f^{n_j}\}_j$ een rijtje $\{f^{n_{j_k}}\}_k$ kunnen kiezen dat op B uniform naar een differentieerbare functie g convergeert.*

We zeggen dat een rijtje functies $\{f_n\}$ uniform op B naar g convergeert als voor ieder klein getal $\varepsilon > 0$ er een $N > 0$ bestaat zodat voor alle $z \in B$ geldt $|f_n(z) - g(z)| < \varepsilon$ als $n > N$.

Dit is geen makkelijke definitie. Gelukkig is er een zware stelling die we niet zullen bewijzen, maar die erg handig is om te controleren of we in de Fatouverzameling zitten.

STELLING 3.2 (MONTEL) *Laat B een schijfje in de Riemannsfeer S zijn. Veronderstel dat er drie verschillende punten $a, b, c \in S$ zijn, zodat de geïtereerden f^n op B de drie waarden a, b, c niet aannemen. Dan is B een deel van in de Fatouverzameling van f .*

Waarom deelrijen? Dat zagen we al in voorbeeld 2.2 3, maar het is de moeite waard er nog eens op te wijzen: Bekijk de afbeelding $f : z \mapsto iz$. Het rijtje $\{f^n\}_n$ convergeert niet, maar omdat $f^{4n}(z) = z$ convergeren de deelrijtjes $\{f^{4n}\}_n$, en $\{f^{4n+3}\}_n$ wel. Iets ingewikkelder ligt het met irrationale rotaties $f : z \mapsto e^{a\pi i}z$ waar a niet rationaal is. Toch kunnen we ook dan convergente deelrijtjes vinden. In deze gevallen bestaat de Fatouverzameling uit heel S . Wanneer f graad > 1 heeft kan dit niet gebeuren. Dan is $J(f)$ niet leeg!

3.2. Het gedrag van \mathcal{F} bij vaste punten

Afbeeldingen als $z \mapsto az$ lijken nauwelijks interessant. Het volgende resultaat, dat een van de oudste is in de theorie van complexe dynamische systemen laat zien dat zij wél belangrijk zijn.

STELLING 3.3 (KOENIGS, 1884) *Veronderstel dat f een vast punt z_0 heeft en dat $\lambda = f'(z_0)$ voldoet aan $|\lambda| \neq 0, 1$. Dan is er een complex differentieerbare coördinaten-transformatie φ van een omgeving U van z_0 naar een schijf $B(0, r)$ met middelpunt 0 en straal r , zodat $\varphi(z_0) = 0$ en*

$$\varphi(f(z)) = \lambda\varphi(z), \quad z \in U. \quad (3.1)$$

De stelling zegt dat in de buurt van z_0 de afbeelding f (in geschikte coördinaten) er uit ziet als de afbeelding $w \mapsto \lambda w$ in de buurt van 0 . We zeggen dat de afbeelding f in de buurt van z_0 kan worden *gelineariseerd*. Je weet dan ook heel precies hoe de dynamica in de buurt van z_0 er uit ziet. Het diagram 3.2 licht dit toe. In de bovenste rij ‘werkt’ f , in de onderste is dit door φ ‘vertaald’ naar vermenigvuldigen met λ . Voor later gebruik introduceren we alvast ψ , dat is de inverse van φ .

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{f} & f(U) \\
 \varphi \downarrow \uparrow \psi & & \varphi \downarrow \uparrow \psi \\
 B(0, r) & \xrightarrow{\lambda} & B(0, \lambda r)
 \end{array} \tag{3.2}$$

De situatie $\lambda = 0$ is moeilijker, maar werd al in 1907 opgelost.

STELLING 3.4 (BÖTCHER, 1907) *Veronderstel dat z_0 een supraantrekkelijk vast punt van f is, meer precies $f(z_0) = z_0$ en $f'(z_0) = 0, \dots, f^{(k-1)}(z_0) = 0$ terwijl $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Dan is er een complex differentieerbare coördinatentransformatie φ op een schijfje B om z_0 zodat*

$$\varphi(f(z)) = \varphi(z^k), \quad z \in B. \tag{3.3}$$

In het geval $\lambda = 1$ hebben we een neutraal vast punt. Het hangt het erg van de precieze waarde van λ af wat er kan gebeuren. Nog steeds zijn hier open problemen! Men kan zeker niet altijd lineariseren.

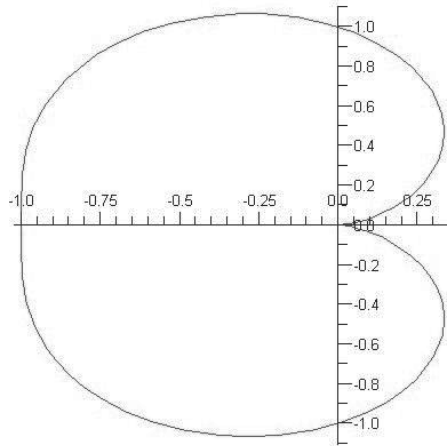
VOORBEELDEN 3.5 *Bekijk de afbeelding $f(z) = z + z^2$. Wanneer we in de buurt van 0 zouden kunnen lineariseren, moest voor een coördinatentransformatie φ in de buurt van 0 gelden*

$$\varphi(z + z^2) = a\varphi(z), \quad z \text{ dicht bij } 0 \tag{3.4}$$

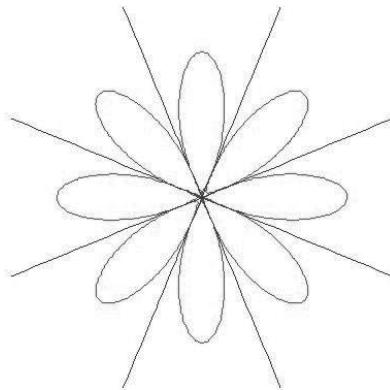
De kettingregel toepassen op (3.4) leert dat $a = 1$ en dan geeft samenstellen met φ^{-1} dat $f(z) = z$, een tegenspraak!

Hoe is de dynamica? Nemen we x reëel, positief en klein, dan zien we dat $f(x) > x$, x wordt weggeduwd. Maar nemen we $x < 0$ en klein dan is $x < x + x^2 < 0$ en wordt x aangetrokken. Een preciezere analyse laat zien dat er een bladvormig gebied is, waarbinnen de punten naar 0 worden getrokken. De positieve x -as is de steel van het blad, zie Figuur 6. De globale analyse is ook interessant. Naast het parabolische vaste punt 0 is er een aantrekkelijk punt in ∞ . Er geldt \mathcal{A}_∞ bevat de verzameling $|z| > 2$, maar ook zit de hele positieve x -as erin. Aan de andere kant, er is een hele rij punten in de schijf met straal 2, die op den duur op 0 worden afgebeeld. In de buurt daarvan vinden we punten die in \mathcal{A}_∞ zitten, en punten die in het bladvormig gebied terecht komen. Op het bladvormig gebied zijn de geïtereerden zeker begrensd, het behoort dus (met de punten die er uiteindelijk binnen belanden) tot de Fatouverzameling. Fatou- en Juliaverzameling zullen gecompliceerd zijn! Zie Figuur 6.

Wat algemener kunnen we $f(z) = z + az^{n+1} = z(1 + az^n)$ bekijken. We noemen $n + 1$ de multipliciteit van het vaste punt. Analoog met het vorige voorbeeld vinden we: op een halflijn uit 0, waar az^n positief is, worden de punten afgestoten. Als az^n negatief, en klein is, wordt het punt z naar 0 getrokken. Met $a = |a|e^{i \arg a}$ en $z = re^{i\varphi}$ worden de afstotende lijnen gegeven door $n\varphi + \arg a = 2k\pi$, en de aantrekkende door $n\varphi + \arg a = (2k + 1)\pi$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Het plaatje wordt een bloem met n aantrekkende blaadjes. Deze worden gescheiden door de afstotende halflijnen, die tot het bassin van ∞ behoren. In Figuur 7 zijn acht aantrekkende blaadjes rood aangegeven en de afstotende halflijnen blauw. Ook hier zal de Juliaverzameling gecompliceerd zijn.



Figuur 6. Aantrekkend bassin voor $z + z^2$ in 0.



Figuur 7. Gedrag om een parabolisch punt, rationale multiplier.

Een neutraal vast punt met de eigenschap dat de multiplier λ een k -de machts eenheidswortel is, ($\lambda^k = 1, \lambda^j \neq 1$ voor $0 < j < k$), heet een *parabolisch vast punt*. Als 0 een parabolisch punt van f is, begint de reeks van f als volgt

$$f(z) = e^{2\pi i \frac{p}{k}} z + az^{n+1} + \dots, p, q \text{ geheel} \tag{3.5}$$

Locaal ziet f er als rotatie over $p\pi/k$ uit. Nu zal f^k multiplier 1 hebben. Men kan bewijzen dat het gedrag van f^k dan zo is als in de voorbeelden 3.5. Door het k keer itereren van f verandert de graad van de tweede term. Omdat er vanwege de k -de machtseenheidswortel een k -voudige symmetrie op zal treden, wordt de multiplicititeit een k -voud.

Als de multiplier λ niet rationaal is, zijn er twee gevallen mogelijk: 1. De afbeelding f kan gelineariseerd worden. Er is dan een coördinatentransformatie φ zodat $\varphi(f(z)) = \lambda\varphi(z)$. Locaal ziet F er uit als een (vervormde) ro-

tatie over een irrationeel veelvoud van π . We noemen het neutrale punt dan een *Siegelpunt* en het gebied waar de coördinatentransformatie geldig is, heet *Siegelschijf*. 2. De afbeelding kan niet gelineariseerd worden. Dan noemen we het neutrale punt een *Cremerpunt*.

OPMERKING 3.6 *Cremer bewees in 1927 dat Cremerpunten bestaan. Meer precies, als λ de multiplier van een neutraal vast punt is, en voor zekere $d \geq 2$ geldt*

$$\sqrt[d]{\frac{1}{|\lambda^q - 1|}} \text{ is onbegrensd als } q \rightarrow \infty,$$

dan is het neutrale punt een Cremerpunt.

In 1942 bewees Siegel dat een neutraal punt met multiplier λ een Siegelpunt is als voor zekere $M > 0$ en $q > q_0$

$$\frac{1}{|\lambda^q - 1|} < q^M.$$

De dewijzen zijn voor ons veel te lastig. Men kan ze vinden in [1]. Wat de stelling van Cremer en Siegel ons laten zien, is dat het de getaltheoretische eigenschappen van λ of meer precies van φ , waar $\lambda = e^{2\pi i \varphi}$, zijn, die de aard van het neutrale punt bepalen. Cremer's conditie zegt dat $q_j \varphi$ voor een rijtje $q_j \rightarrow \infty$ heel dicht bij een rationaal getal ligt en Siegels conditie zegt juist dat φ heel slecht door rationale getallen benaderd kan worden. Bijvoorbeeld, met $e^{2\pi ki} = 1$:

$$|\lambda^q - 1| > q^{-M} \Rightarrow |\varphi q - k| > q^{-M} \Rightarrow \left| \varphi - \frac{k}{q} \right| > q^{-M-1}$$

voor zekere k .

Neutrale vaste punten worden nog steeds volop onderzocht. Vergelijk de referenties in Milnor's boek [3]. Het is leuk te vermelden dat Yoccoz recent de Fields medal kreeg voor werk dat hij op dit gebied deed.

We missen voor een goede beschrijving van van de Fatouverzameling nog een ingredient: Een *Hermanring* is component van de Fatouverzameling van f die via een coördinatentransformatie met een ring $\{1 < |z| < r\}$ correspondeert. De afbeelding f correspondeert dan met een rotatie. Het is opmerkelijk dat de rotaties die op kunnen treden dezelfde zijn als die voor Siegelschijven.

3.3. De stelling van Sullivan

De volgende stelling beschrijft precies de mogelijke componenten van de Fatouverzameling van een rationale functie f . Een component C van de Fatouverzameling van f heet invariant als $f(C) = C$. Een component heet periodiek als er een k is zodat C invariant is voor f^k

STELLING 3.7 (SULLIVAN) *Zij f een rationale functie. Invariante componenten van $S \setminus J$ zijn van de vorm*

- (i) C bevat een aantrekkend vast punt.

(ii) C is de component van precies een blad van een parabolisch vast punt met multiplicier 1.

(iii) C is een Siegelschijf.

(iv) C is een Hermanring.’

Periodieke componenten zijn van de vorm

(i) C bevat een aantrekkend periodiek punt.

(ii) C is de component van precies een blad van een parabolisch vast punt.

(iii) Er is een k zodat C is een Siegelschijf voor f^k .

(iv) Er is een k zodat C is een Hermanring voor f^k .

Iedere component C van de Fatouverzameling is uiteindelijk periodiek. Dat wil zeggen er bestaat een j zodat $f^j(C)$ een periodieke component van f is.

Voor een bewijs, zie [1].

Je kunt je afvragen of er nog andere mogelijkheden denkbaar zijn. Ja dat kan, en als we buiten de klasse van rationale functies komen, treden die ook op. Het gaat om ‘zwervende’ gebieden, componenten van de Fatouverzameling die nooit in een periodieke component terecht komen, en onder iteratie over de Riemannsfeer blijven zwerfen.

4. De Juliaverzameling voor polynomen en rationale functies

4.1. Eigenschappen van polynomen en rationale functies

De *graad* van een polynoom $P(z)$ is de grootste exponent van z die in het polynoom voorkomt. Bijvoorbeeld $z^5 + 3z^2 + 128$ heeft graad 5. Omdat we complexe coëfficiënten toelaten kan een polynoom van graad n altijd geschreven worden als

$$P(z) = c(z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_n). \quad (4.1)$$

Dit resultaat staat bekend als de *hoofdstelling van de algebra*. De getallen c en a_i kunnen complex zijn, ook als P alleen reële coëfficiënten heeft. De a_i zijn de nulpunten van P . Ze hoeven niet verschillend te zijn. Als een a_i k keer optreedt, heet k de multipliciteit van het nulpunt, a_i heet dan een k -voudig nulpunt. De hoofdstelling van de algebra spreekt dus uit dat een polynoom van graad n precies n nulpunten heeft, multipliciteiten geteld. Een punt waar P de waarde w aanneemt, noemen we w -punt. De multipliciteit van een w -punt a is de multipliciteit van het nulpunt a van het polynoom $P(z) - w$. Wanneer de multipliciteit van a groter dan 1 is, zal $P'(a) = 0$ en de multipliciteit van a met betrekking tot P is gelijk aan de multipliciteit van de afgeleide van $P + 1$. Punten waarvan de multipliciteit > 1 is, heten *kritieke punten*.

Iedere rationale functie $R(z) = P(z)/Q(z)$ kan herschreven worden op zo’n manier dat de polynomen P en Q geen gemeenschappelijke factor hebben, of equivalent geen gemeenschappelijk nulpunt. We zullen dit vanaf nu

altijd doen en we zullen ook aannemen dat R niet constant is. Wanneer we R op die manier gerepresenteerd hebben, noemen we het maximum van de graad van P en de graad van Q de *graad van de rationale functie* R . Bijvoorbeeld, de graad van $(z^3 + 1)/z^5 + 2$ is 5. Voor rationale functies worden multipliciteit en kritiek punt net zo gedefinieerd als voor polynomen.

In de nulpunten van de noemer Q zal de R de waarde ∞ aannemen. Een nulpunt van Q heet een *pool van de rationale functie*. De multipliciteit van het nulpunt is per definitie de multipliciteit van de pool van R . Een polynoom stuurt ∞ naar ∞ en het is dus gerechtvaardigd dat we zeggen dat een polynoom in oneindig een pool heeft. Wat is de multipliciteit? Door coördinaten overgang $z \mapsto 1/z$ verleggen we de pool naar 0, en uitschrijven leert ons dat de multipliciteit gelijk is aan de graad van het polynoom. We zien dat voor polynomen (als afbeeldingen van de Riemannsfeer S naar S , de som van de multipliciteiten van de nulpunten gelijk is aan de som van de multipliciteiten van de polen. Dit geldt evenzeer voor rationale functies.

In ∞ veranderen de formules overeenkomstig wat je na coördinatenverandering zou verwachten. Multipliciteit van een nulpunt in ∞ is multipliciteit van de afgeleide -1 , en voor een pool vinden we juist $+1$.

4.2. Eigenschappen van de Julia- en de Fatouverzameling

Voor een rationale afbeelding R met Fatouverzameling \mathcal{F} geldt $R(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$, want een rijtje geïtereerden $(R^{n_j})_j$ op $R(\mathcal{F})$ geeft het rijtje $(R^{n_j+1})_j$ op \mathcal{F} , dat heeft een convergent deelrijtje en $(R^{n_{j_k}+1})_k$ en het rijtje $(R^{n_{j_k}})_k$ is een convergent deelrijtje op $R(\mathcal{F})$. Ook het inverse beeld $R^{-1}(\mathcal{F})$ behoort met een soortgelijk argument tot de Fatouverzameling. Omdat de Juliaverzameling J gelijk is aan het complement van \mathcal{F} , $J = S \setminus \mathcal{F}$ zal $R(J) \subset J$ en $R^{-1}J \subset J$. Omdat $R(S) = S$ en volgt $R(J) = J$, $R(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$, en evenzo $R^{-1}(J) = J$, $R^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. We noemen een verzameling $K \in S$ *totaal invariant* onder R als $K = R(K) = R^{-1}(K)$. We hebben nu dus de volgende stelling.

STELLING 4.1 *Zij R een rationale afbeelding. De Fatouverzameling \mathcal{F} en de Juliaverzameling J van R zijn totaal invariant onder R .*

Neem eens een punt $z_0 \in J$, en laat R graad k hebben. Dan bestaat $R^{-1}(\{z_0\})$ uit k punten (multipliciteiten geteld) die allemaal in J liggen, $R^{-2}(\{z_0\})$ uit k^2 punten in J , enzovoorts. Dit geeft een prima plaatje van J vanwege

STELLING 4.2 *Laat R een rationale afbeelding zijn met Juliaverzameling J en laat $z_0 \in J$. dan liggen de achterwaarts geïtereerden van z_0 dicht in J .*

Iets over het bewijs. Neem een klein schijfje U om $w \in J$. Uit de stelling van Montel (3.2) volgt dat $\cup_n f^n(U)$ ten hoogste twee punten in S niet bevat. Je kunt laten zien dat die twee punten niet in de Juliaverzameling liggen. Bij ieder punt z_0 van J is er dan een m met $f^{-m}(z_0)$ in $U \cap J$. Omdat w vrij gekozen is en U willekeurig klein gekozen kan worden, bewijst dit de stelling.

□

De stelling zegt ons dat we de Juliaverzameling in principe kunnen tekenen door met een punt in de Juliaverzameling te beginnen, en de achterwaarts geïtereerden van dat punt te kleuren.

Welke punten liggen in de Juliaverzameling?

STELLING 4.3 *De Juliaverzameling bevat alle afstotende vaste punten, en alle neutrale vaste punten die niet tot een Siegelschijf behoren.*

Dit garandeert nog niet dat we een punt in de Juliaverzameling kunnen vinden. de volgende stelling die Julia en Fatou onafhankelijk van elkaar bewezen, doet dat wel.

STELLING 4.4 *De afstotende periodieke punten liggen dicht in de Juliaverzameling.*

STELLING 4.5 *Ieder bassin van aantrekking bevat een kritiek punt.*

Dit is een nuttige stelling, omdat het meestal eenvoudig is om de kritieke punten uit te rekenen. Voor het bewijs is kennis van elementaire functietheorie noodzakelijk, maar een glimpje van het argument kunnen we wel laten zien.

Glimpje van een bewijs. Kijk nog eens terug naar het diagram (3.2). Dit zegt $\varphi(f(z)) = \lambda(\varphi(z))$

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{f} & f(U) \\
 \varphi \downarrow \uparrow \psi & & \varphi \downarrow \uparrow \psi \\
 B(0, r) & \xrightarrow{\cdot\lambda} & B(0, \lambda r)
 \end{array} \tag{4.2}$$

De inverse ψ is gedefinieerd op een schijfje. Hoe groot is de straal van de maximale schijf waarop ψ nog als complexe coördinatentransformatie kan zijn gedefinieerd? In ieder geval eindig, anders zou f injectief zijn. We bekijken nu de identiteit $\psi = f^{-1}\psi(\lambda z)$, die uit het diagram volgt door linksonder te beginnen. Hij zegt wanneer je ψ op $B(0, \lambda r)$ kent en f lokaal geïnverteerd kan worden, dan is ψ ook op $B(0, r)$ te definiëren. Nu weet je ψ op een klein schijfje, en dus op een steeds groter schijfje, totdat lokaal invertieren van f niet meer mogelijk is. Dat laatste gebeurt precies in de punten waar de afgeleide $f' = 0$. We concluderen dat φ een of ander kritiek punt z_0 afbeeldt op de rand van de grootste schijf $B(0, r)$ waarop ψ gedefinieerd kan worden. We kijken nu naar de cirkel $C_{\lambda r} = C(0, \lambda r)$.

Het beeld $\psi(C_{\lambda r})$ is in $f(U)$. En dus is $f^{-1}(\psi(C_{\lambda r})) \subset U$. Vanwege de continuïteit van f zal $z_0 \in f^{-1}(\psi(C_{\lambda r}))$. □

STELLING 4.6 *Zij R een rationale afbeelding met niet lege Fatouverzameling \mathcal{F} . Voor iedere vereniging van componenten van \mathcal{F} die totaal invariant is onder R geldt dat de rand van zo'n vereniging gelijk is aan de Juliaverzameling.*

Bewijs. Dit bewijzen verlangt wat topologische voorkennis. Een rand K van zo'n component zit zeker in J en is totaal invariant onder R . Dus met stelling 4.2 ligt de K dicht in J , maar K is gesloten. Dan is $K = J$. □

Combinatie van bovenstaande stellingen geeft ons een instrument om Juliaverzamelingen te tekenen. Laat R een rationale functie zijn. Los op $R(z) = z$, en bepaal zo de vaste punten. Onderzoek of deze afstotend zijn. Zo niet, bekijk R^2 en kijk of hier afstotende vaste punten zijn (dat zullen afstotende periodieke punten met periode 2 zijn). Ga zo door. De stelling 4.4 laat zien dat dit proces eindigt. We hebben dan een startpunt gevonden en passen dan achterwaartse iteratie uit stelling 4.2 toe om een dichte deelverzameling te vinden.

We moeten wel bedenken dat het erg lang kan duren voor met deze methode een goed beeld ontstaat. Dat geldt eigenlijk voor alle tot nu toe bekende methoden, er zijn altijd wel afbeeldingen waarvan de Juliaverzameling zich niet goed laat tekenen.

Voor polynomiale afbeeldingen P is er een andere tekenmethode. Voor een polynoom zal ∞ een supraantrekkelijk punt zijn, en je kunt vrij makkelijk een M berekenen zodat $\{|z| > M\} \subset \mathcal{A}_\infty$. Neem ook een getal N , dat een beetje groot is, maar zo dat je computer N iteraties makkelijk kan hanteren. Zeg $N = 100$. Kies ook 100 kleuren die mooi verlopen.

Je neemt nu een pixel z , $|z| < M$. Bereken de geïtereerden $P(z), P^2(z), \dots$ tot je buiten de cirkel $|z| = M$ bent of de 100 iteraties bereikt hebt. Kleur je pixel nu volgens het iteratiegetal dat je bereikt hebt. De punten die kleur 100 hebben zitten waarschijnlijk niet in \mathcal{A}_∞ . We hebben de *gevulde Juliaverzameling* kleur N gegeven. De Juliaverzameling vinden we nu door punten met kleur 100 te herkleuren precies als zij omringd zijn door 8 pixels van kleur 100. Dan houden we wegens stelling 4.6 de Juliaverzameling over.

Het 'waarschijnlijk' moet wel met een korreltje zout genomen worden. Een afbeelding als $z + z^4$ heeft een neutraal vast punt in 1, en punten op de positieve x as zitten in \mathcal{A}_∞ . Maar begin eens met $1+1/100$. Het duurt erg lang voordat je voorbij 2 bent!

4.3. Structuur van de Juliaverzameling

We weten nu hoe we een Juliaverzameling moeten tekenen, maar hoe zien ze er uit? Hierover gaan de volgende stellingen.

STELLING 4.7 *Voor een rationale afbeelding is de Juliaverzameling samenhangend, of hij bestaat uit oneindig veel componenten. De Juliaverzameling heeft geen geïsoleerde punten. (Een punt z van een verzameling K heet geïsoleerd als er een schijfje om z bestaat dat geen punten van $K \setminus \{z\}$ bevat.)*

STELLING 4.8 *Als de Juliaverzameling een open schijf bevat, geldt $J = S$. Er bestaan rationale functies waarvoor $J = S$.*

STELLING 4.9 *De Juliaverzameling van een polynoom is samenhangend dan en slechts dan als het \mathcal{A}_∞ geen eindige kritieke punten bevat.*

STELLING 4.10 *De Juliaverzameling van een polynoom is totaal onsamenvast dan en slechts als alle kritieke punten in \mathcal{A}_∞ zitten.*

Bewijsidee. Om hier een idee van te geven gaan we te werk als bij stelling 4.5. We kijken naar tweedegraads polynomen. Het diagram hieronder hoort nu bij Bötchers stelling 4.6. Op dezelfde manier als in stelling 4.5 bereiken we een maximale r zodat ψ op $B(0, r)$ gedefinieerd is.

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{f} & f(U) \\
 \varphi \downarrow \uparrow \psi & & \varphi \downarrow \uparrow \psi \\
 B(0, r) & \xrightarrow{z \mapsto z^2} & B(0, r^2)
 \end{array} \tag{4.3}$$

Het polynoom f beeldt S 2:1 af op S , met uitzondering van ∞ en het enige kritieke punt z_0 . Met andere woorden, ieder punt heeft twee originelen onder f , behalve ∞ en $f(z_0)$.

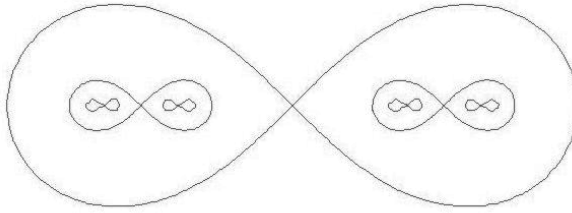
Omdat z^2 een cirkel $C(0, s)$ ($0 < s < 1$), om 0 met straal s 2:1 afbeeldt op de cirkel $C(0, s^2)$, zal f de enkelvoudig gesloten kromme $\Gamma_s = \psi(C(0, s))$ 2:1 afbeelden op $\Gamma_{s^2} = \psi(C(0, s^2))$. Als in 4.5 ligt het kritieke punt van f op $\Gamma_r = \psi(C(0, r))$. Het beeld $f(\Gamma_r) = \Gamma_{r^2}$ is een enkelvoudig gesloten kromme. Iedere punt van Γ_{r^2} heeft twee originelen, behalve $f(z_0)$. Dat is alleen mogelijk als Γ_r een lemniscaatachtige kromme is, zoals de grootste kromme in Figuur 8; f beeldt zowel de linker lus als de rechter lus op Γ_{r^2} af. Het binnengebied van iedere lus wordt injectief op het binnengebied van Γ_{r^2} afgebeeld. De Juliaverzameling is bevat in de twee lussen en omdat de Juliaverzameling totaal invariant is, vinden we binnen iedere lus een stukje Juliaverzameling terug.

We kijken nu naar $f^{-1}(\Gamma_{r^2+\varepsilon}) \subset \mathcal{A}_\infty$. Dit bestaat uit twee enkelvoudig gesloten krommen, bevat in de lussen van het grootste lemniscaat. Als ε toeneemt krimpen de lussen. We kunnen ε laten toenemen tot $f^{-1}(\Gamma_r)$ is bereikt. Dan hebben we het inverse beeld van een lemniscaat onder f , en vinden we in iedere lus een lemniscaat. Alles buiten deze lemniscaatjes ligt in A^∞ en in ieder van de vier kleine lusjes zal men wegens totale invariantie punten van J moeten vinden. We kunnen de analyse op deze manier voortzetten en vinden in de volgende stap vier kleine lemniscaatjes die de Juliaverzameling bevatten en zo verder. Uit dit proces volgt dat delen van J die niet in dezelfde lus zitten zeker niet in een zelfde component van J kunnen zitten. Omdat de lussen in diameter naar 0 krimpen, bestaan de componenten dan uit losse punten.

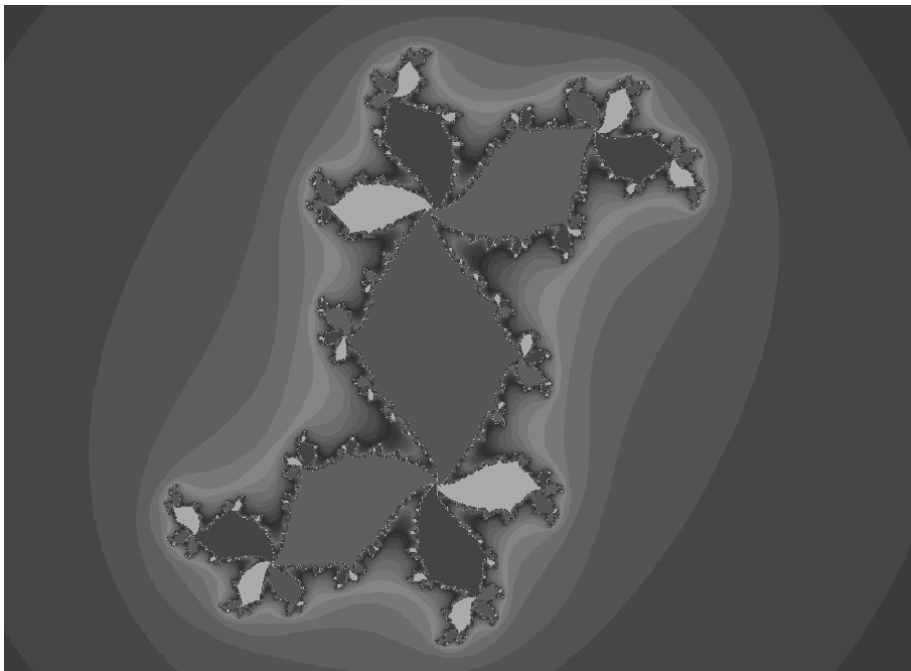
Zie Figuur 8. □

GEVOLG 4.11 *Voor een kwadratisch polynoom zijn er twee mogelijkheden: De Juliaverzameling is samenhangend of totaal onsaamenhangend.*

Immers een kwadratisch polynoom heeft precies een eindig kritiek punt, en we zitten dus in een van stelling 4.9 of 4.10.



Figuur 8. De vorming van een totaal onsamenvhangende Juliaverzameling: J treft het binnenste van ieder lemniscaat.



Figuur 9. Een samenhangende Juliaverzameling. Zie pagina 140 voor een kleurenillustratie.

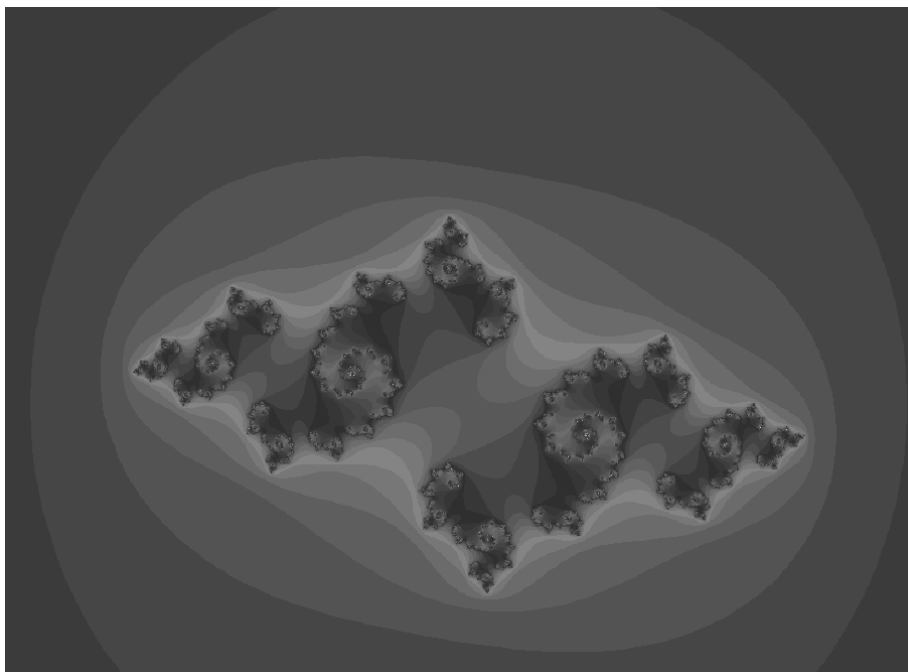
5. De Mandelbrotverzameling

5.1. Polynomen parametriseren

In een algemeen polynoom van graad 2,

$$P_2(z) = az^2 + bz + c \tag{5.1}$$

treden drie coëfficiënten a, b, c op. Alle polynomen van graad 2 kunnen via (5.1) geïdentificeerd worden met vectoren (a, b, c) in \mathbb{C}^3 . We noemen \mathbb{C}^3 wel de parameterruimte voor polynomen van graad 2, omdat deze polynomen



Figuur 10. Een onsamenhangende Juliaverzameling. Zie pagina 140 voor een kleurenillustratie.

door (4.1) worden geparametriseerd. In \mathbb{C}^3 kunnen we dan klassen polynomen met zekere eigenschappen identificeren, bijvoorbeeld, de polynomen met twee samenvallende nulpunten worden gekenmerkt door de discriminant $D = b^2 - 4ac = 0$. Kleuren we punten (a, b, c) met $D = 0$ rood, en de andere punten blauw, dan zouden we in een blauwe \mathbb{C}^3 een roodgekleurd vlak vinden. We zouden ook een andere eigenschap kunnen nemen, bijvoorbeeld, een van de nulpunten is 0, dan vinden we weer een vlak van punten zodat de het bijbehorende polynoom nul is in nul, namelijk $c = 0$. Een bezwaar bij deze exercities is dat \mathbb{C}^3 een beetje te groot is om mooi te tekenen.

5.2. De definitie en het tekenen van de Mandelbrotverzameling

De eigenschap waar het in de Mandelbrotverzameling om gaat is een eigenschap die met de dynamica van tweedegraads polynomen te maken heeft. Omdat we nu in dynamica geïnteresseerd zijn, willen we twee polynomen wel als gelijkwaardig zien wanneer ze door een coördinatentransformatie op S in elkaar kunnen worden overgevoerd. Merk op dat zo'n transformatie ∞ op zijn plaats moet laten. Dan kun je laten zien dat de enige transformatie van de vorm $w = \varphi(z) = pz + q$ zijn. De inverse is $\varphi^{-1}(w) = 0$. Wat gebeurt er onder die transformatie met (5.1)? We vinden

$$\varphi^{-1}(P_2(\varphi(z))) = (ap)z^2 + (2aq + b)z + \frac{q^2 + bq + c - q}{p}. \tag{5.2}$$

Formule (5.2) laat zien dat iedere P_2 equivalent is, via coördinatentransformatie, met een polynoom

$$z(z - e),$$

kies maar $p = 1/a$ $q^2 + bq + (c - q) = 0$. We krijgen dan alle mogelijke dynamica van tweedegraads polynomen door e door de complexe getallen te laten lopen en te kijken hoe de dynamica van $z(z - e)$ is. De parameterruimte is nu \mathbb{C} , en daar kunnen we goede plaatjes in maken. Mandelbrot koos ervoor om $p = 1/a$, $q = -b/2a$ te kiezen. Je krijgt dan polynomen van de vorm $z^2 + c$, (met een andere c dan die in (5.1)) en weer zien we alle mogelijke dynamica van tweedegraads polynomen door c over de complexe getallen te laten lopen. Een bijkomend voordeel is dat bij verschillende waarden van c de bijbehorende polynomen niet door coördinatentransformatie in elkaar zijn over te voeren, maar bij de eerste parametrisatie horen bij e en $2 - e$ dezelfde polynomen.

Wat is nu de eigenschap waar het om gaat? Tegenwoordig wordt die zo geformuleerd:

‘De Juliaverzameling is samenhangend.’

De Mandelbrotverzameling is dus de verzameling $c \in \mathbb{C}$ waarvoor de polynomen $z^2 + c$ een samenhangende Juliaverzameling hebben.

Deze eigenschap is niet in een vergelijking te vatten. Zonder computers kun je er geen beeld van krijgen. Maar zonder wiskunde gaat het ook niet. Een computer kan moeilijk uitvinden of een verzameling samenhangend is. Hoe worden dan zulke precieze plaatje gemaakt?

We gebruiken stelling 4.9 die zegt dat de Juliaverzameling van een polynoom samenhangend is, dan en slechts dan als de eindige kritieke punten niet in het bassin van aantrekking van ∞ zitten. Nu is 0 het enige kritieke punt van $z^2 + c$. Dus je moet alleen weten of de geïtereerden van 0 onder $z^2 + c$ naar ∞ gaan of niet. Dat kan een computer vrij snel bepalen. En wij soms ook! Met de driehoeksongelijkheid vinden we: als $|c| > 2$ en $|z| \geq |c|$ dan geldt

$$|z^2 + c| > |z||c| - |c| \geq (|z| - 1)|c| > (|c| - 1)|z| + (|z| - 2) \geq (|c| - 1)|z|,$$

dus z behoort dan tot het bassin van ∞ . Omdat $0 \mapsto c$ volgt dat de Mandelbrotverzameling bevat is in $\{|c| \leq 2\}$.

Voor $|c| \leq 2$ zullen we echt moeten itereren, maar gelukkig niet tot oneindig. Als $|c| \leq 2$ en $|z| > 3$ zal $|z^2 + c| > (|z| - 2)|z|$ en zal het bassin van ∞ de verzameling $|z| > 3$ bevatten. Als het beeld van 0 onder 50 iteraties nog steeds niet buiten de cirkel met straal 3 is, kun je er vrij zeker van zijn dat c in de Mandelbrotverzameling zit!

5.3. Berekeningen aan de Mandelbrotverzameling

Een meer conceptuele benadering is te bekijken wanneer P_c een aantrekkend vast punt $z = 0$ heeft. In het bassin van aantrekking van z_0 moet dan een kritiek punt zitten wegens stelling 4.5. Maar 0 is het enige kritieke punt en dus zit 0 in het bassin van z_0 . We concluderen dat $c \in \mathcal{M}$.

Nu de berekening. Voor een vast punt van P_c lossen we op

$$z^2 + c = z.$$

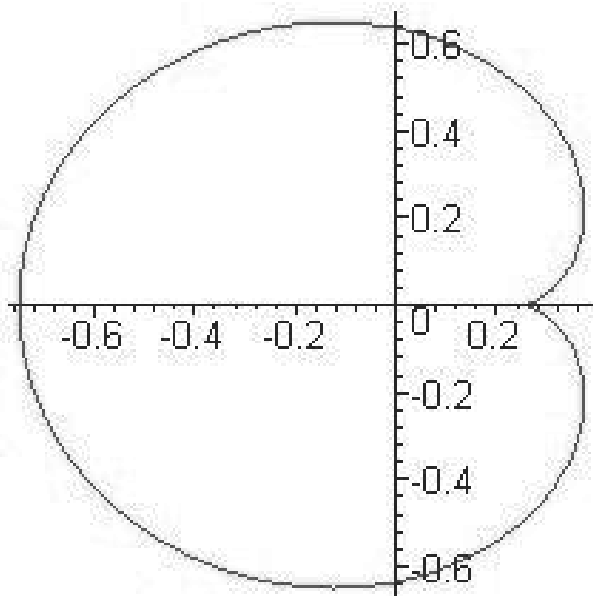
Oplossingen zijn twee vaste punten z_0 :

$$z_0 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2}. \quad (5.3)$$

De afgeleide van P_c is $2z$, dus de afgeleide in z_0 is $1 \pm \sqrt{1 - 4c} = \lambda$. Hieruit volgt

$$(\lambda - 1)^2 = 1 - 4c, \quad \text{ofwel} \quad c = \frac{2\lambda - \lambda^2}{4},$$

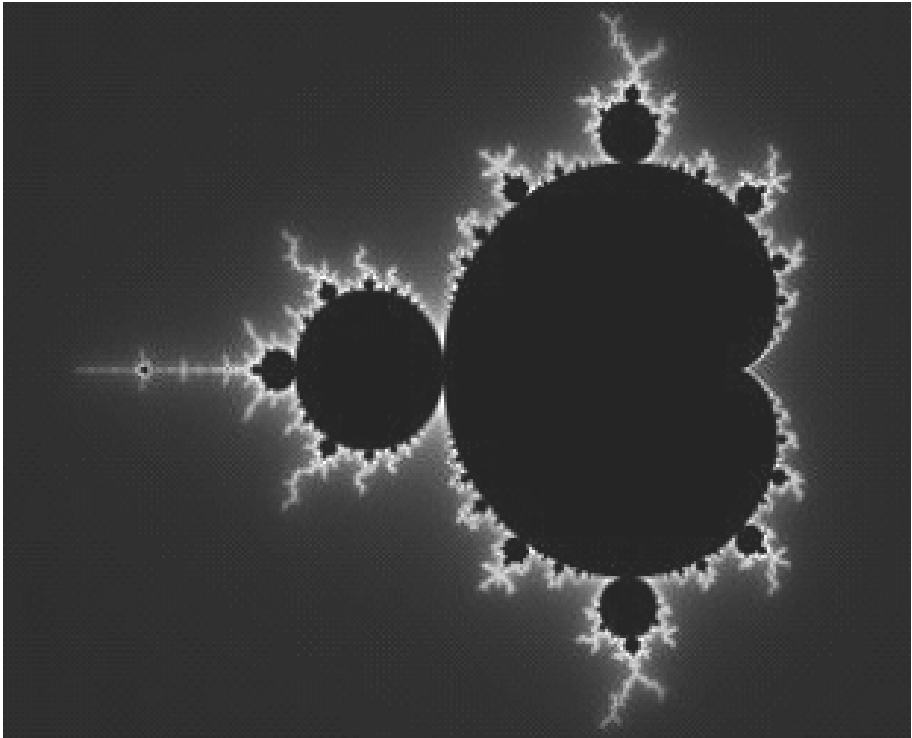
De c 's die je krijgt door $|\lambda| < 1$ te nemen vormen dat deel van \mathcal{M} waarvoor P_c een aantrekkend vast punt heeft. Deze verzameling wordt de *hoofdcardioïde* genoemd. Zie Figuur 11



Figuur 11. De hoofdcardioïde van de Mandelbrotverzameling.

Ietsje verder doorrekenend kijken we naar P_c^2 . Er geldt

$$P_c^2(z) = z^4 + 2cz^2 + c^2 + c. \quad (5.4)$$



Figuur 12. De Mandelbrotverzameling. Zie pagina 141 voor een kleurenillustratie.

We zoeken de vaste punten dus lossen op $P_c^2(z) = z$. Dit is een vierdegraads vergelijking, maar we weten dat de vaste punten van P_c twee oplossingen vormen. Met andere woorden $P_c^2 - z$ heeft een factor $z^2 + c - z$. Dan reken je de andere factor makkelijk uit en vinden we

$$z^4 + 2cz^2 + c^2 + c - z = (z^2 + c - z)(z^2 + z + c + 1).$$

De twee nieuwe vaste punten zijn de oplossingen van $z^2 + z + c + 1 = 0$. De multiplier in z wordt gegeven door

$$(P_c^2)'(z) = 4z^3 + 4cz = 4z(z^2 + c).$$

In de nieuwe vaste punten geldt $z^2 = -z - c - 1$. Dit geeft voor de multiplier in zo'n vast punt

$$4z(z^2 + c) = 4z(-z - 1) = 4(c + 1)$$

. De conclusie is dat de verzameling $|c + 1| < 1/4$ in \mathcal{M} bevat is. Deze schijf representeert polynomen met een aantrekkende baan van periode 2 en is in $-3/4$ aan de hoofdcardioid verbonden.

Een laatste berekening: Voor $c > 1/4$ zien we dat (5.3) geen reële oplossingen heeft. Verder is het rijtje $0 \mapsto c \mapsto c^2 + c \mapsto c^4 + 2c^3 + c^2 + c >$ en zo

voorts monotoon stijgend. Een eindige limiet kan niet optreden, dat zou een oplossing van (5.3) zijn. De limiet is dus oneindig en dus in $c \in \mathcal{A}_\infty$. Deze c zitten niet in de Mandelbrotset.

Met de hand kun je dit nog verder verfijnen, maar een precies beeld krijg je pas met een computer! Zie Figuur 12.

Een belangrijk probleem was of de Mandelbrotverzameling samenhangend is. De eerste computerplaatjes leken te duiden op splitsbaar. Latere plaatjes waren preciezer. Douady en Hubbard en bewezen dat de Mandelbrotverzameling samenhangend is.

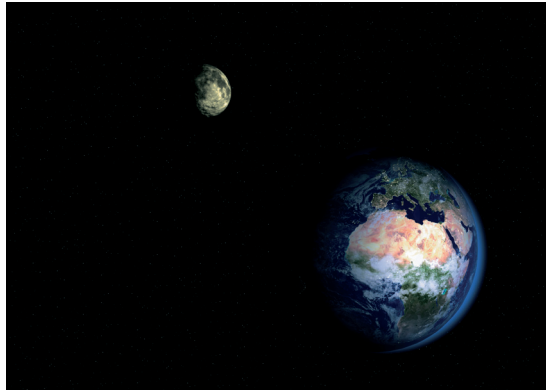
Nog een woord over de kleuring buiten de Mandelbrotverzameling. De methode die we voor het kleuren van de Fatouverzameling noemden, kan ook hier gebruikt worden. Voor een waarde c itereren we 0 totdat we buiten de schijf met straal 3 terecht zijn gekomen, of we de 100 iteraties bereikt hebben. We kleuren het punt c dan volgens het bereikte aantal.

Literatuur

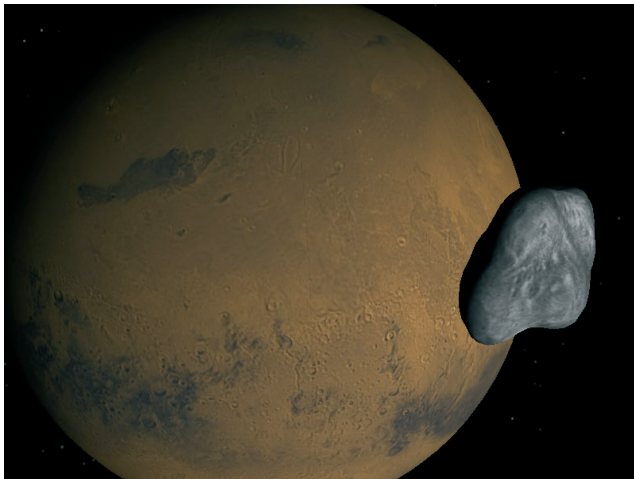
1. Lennart Carleson & Theodore W. Gamelin, *Complex Dynamics*, Springer, 1995.
2. Robert L. Devaney, *An introduction to Chaotic Dynamical Systems* Benjamin-Cummings, 1986.
3. John Milnor *Dynamics in One Complex Variable* Annals of Math Studies 160, Princeton 2005.

Kleurenillustraties

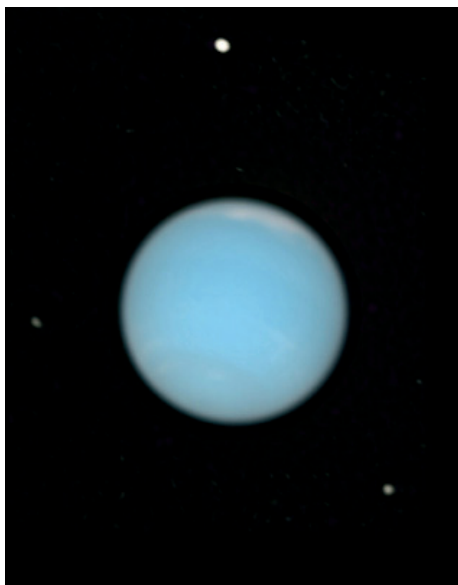
1. Rainer Kaenders – Dubbelplaneten (pp. 73–96)



Figuur 2. De dubbelplaneet aarde-maan.



Figuur 5. Dubbelplaneet Mars-Phobos



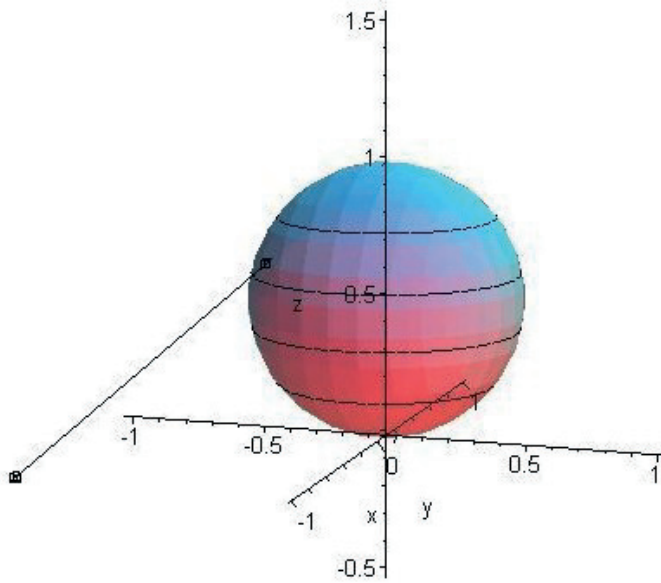
Figuur 6. Neptunus met de drie grootste manen, opgenomen door het Hubble-ruimtetelescoop.

2. Arjen Doelman – De dynamica van patronen: wiskunde en woestijnen (pp. 27–45)

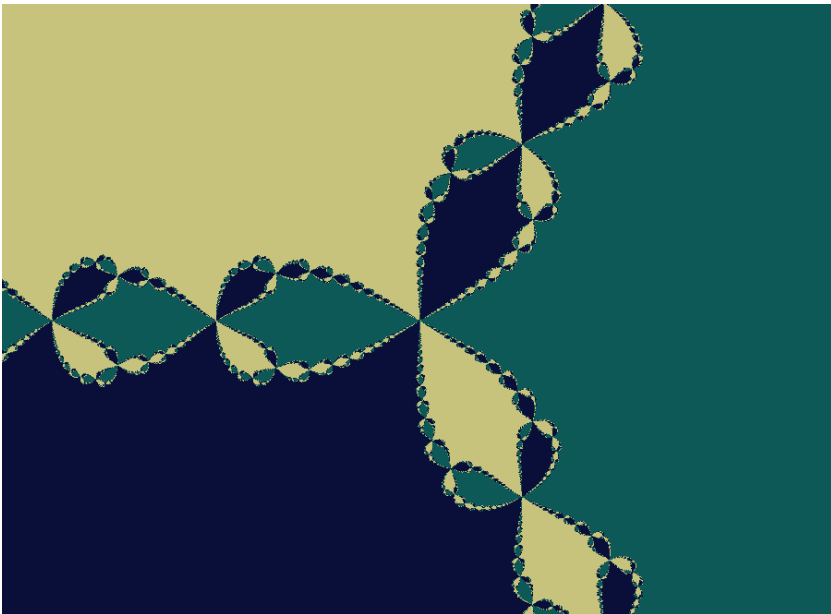


Figuur 1. Twee voorbeelden van patronen die met Google Earth gevonden kunnen worden. Links een meanderende rivier die zich in het Braziliaans regenwoud bevindt, rechts een 'labyrint-achtig' vegetatiepatroon aan de rand van een woestijn in Niger (de meer donkere gebieden zijn begroeid, de lichtere niet). Beide patronen zijn dynamisch, ze veranderen, of evolueren, op een tijdschaal van jaren.

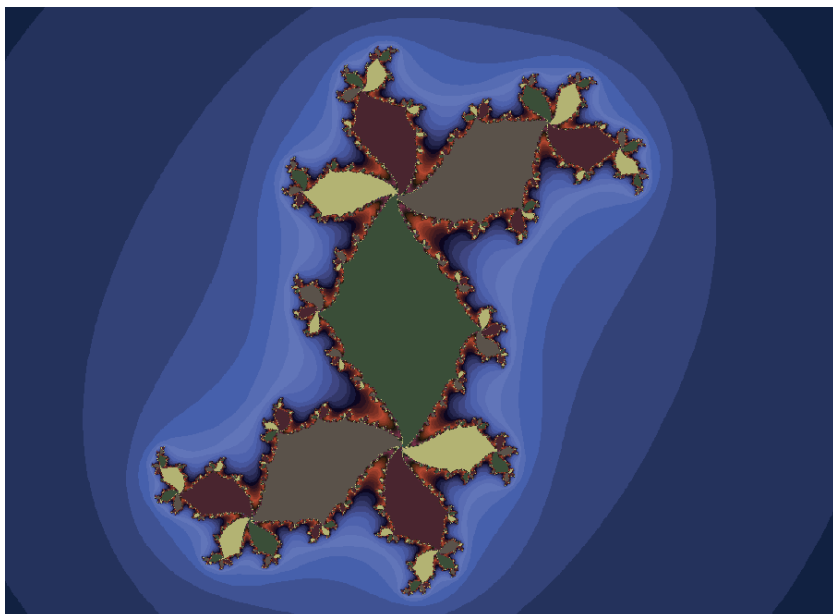
3. Jan Wiegerinck – Complexe dynamica (pp. 109–136)



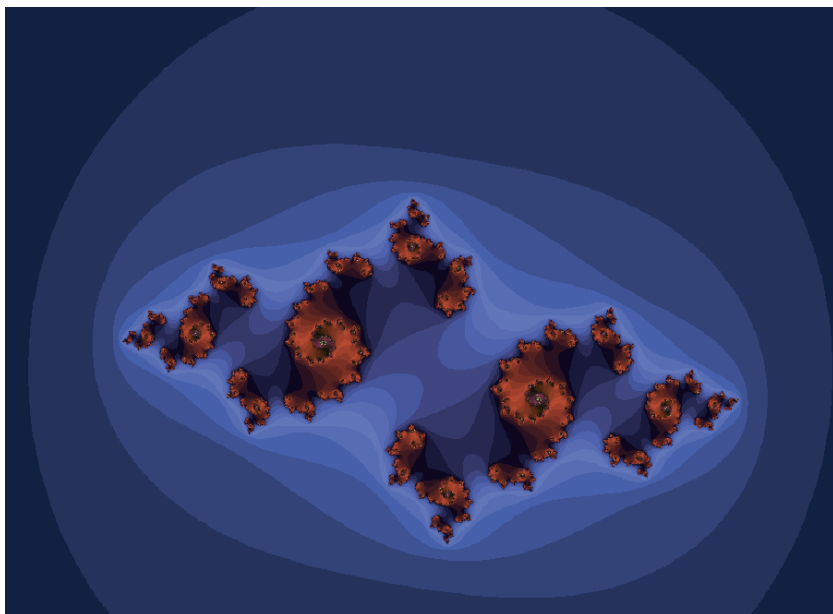
Figuur 4. De Riemannsfeer S , een punt in \mathbb{C} en het bijbehorende punt op S .



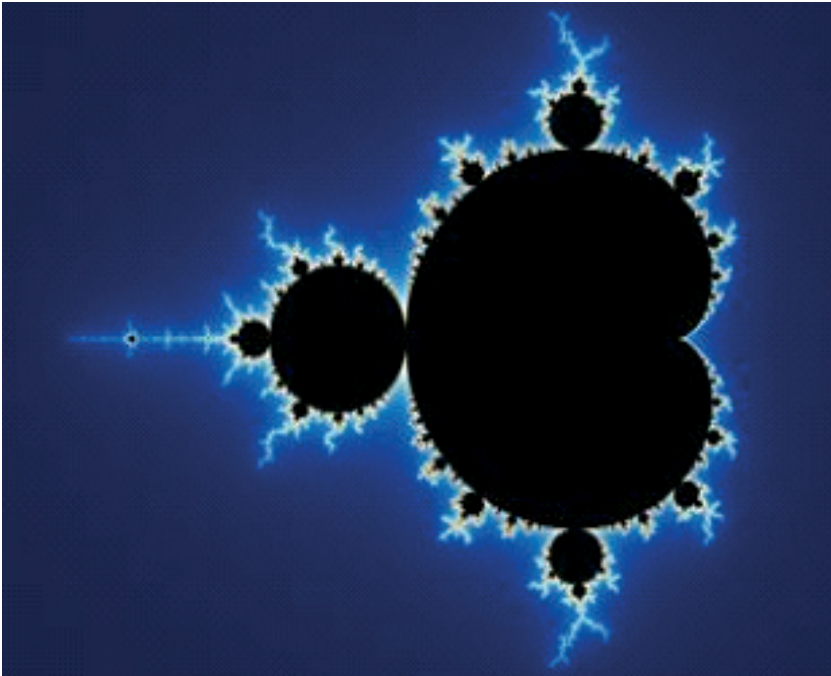
Figuur 5. De Juliaverzameling bij Newton Raphson voor $x^3 - 1$



Figuur 9. Een samenhangende Juliaverzameling.

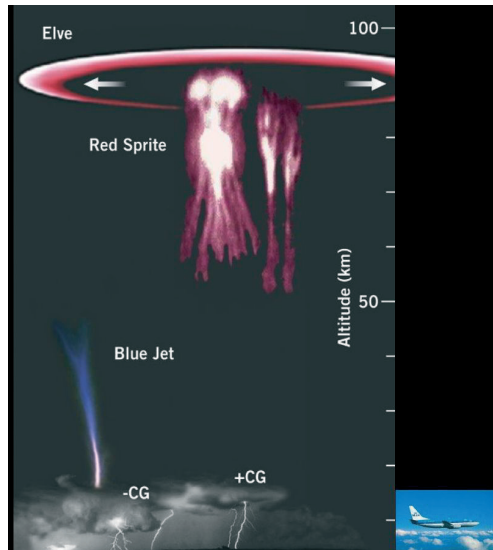


Figuur 10. Een onsamenvast Juliaverzameling.

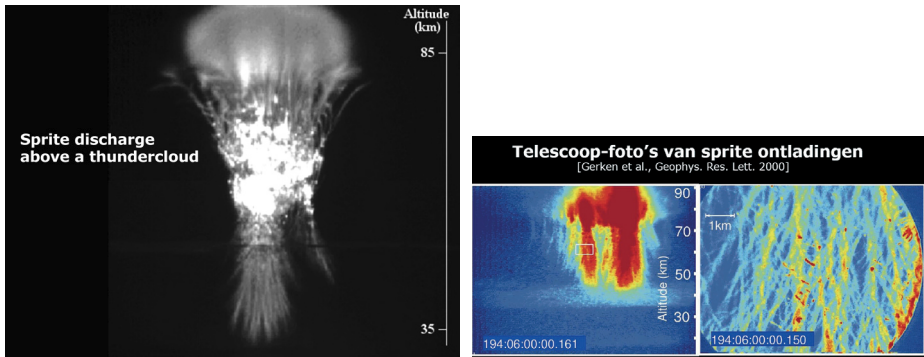


Figuur 12. De Mandelbrotverzameling.

4. Bernard Meulenbroek – Donder en bliksem (pp. 97–107)



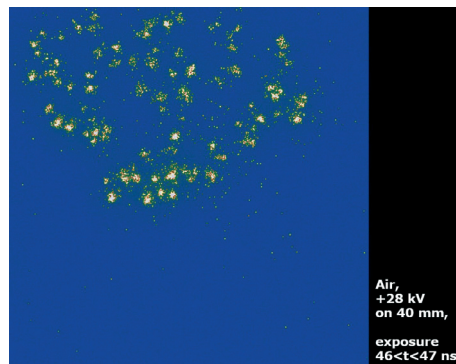
Figuur 1. Gasontladingen boven onweerswolken.



Figuur 2. Twee opnames van sprite-ontladingen.



Figuur 3. Opstelling en resultaten van de experimenten.



Figuur 4. Nu met een kortere belichtingstijd.

CWI SYLLABI

- 1 Vakantiecursus 1984: *Hewet - plus wiskunde*. 1984.
- 2 E.M. de Jager, H.G.J. Pijls (eds.). *Proceedings Seminar 1981–1982. Mathematical structures in field theories*. 1984.
- 3 W.C.M. Kallenberg, et al. *Testing statistical hypotheses: worked solutions*. 1984.
- 4 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium topics in applied numerical analysis, volume 1*. 1984.
- 5 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium topics in applied numerical analysis, volume 2*. 1984.
- 6 P.J.M. Bongaarts, J.N. Buur, E.A. de Kerf, R. Martini, H.G.J. Pijls, J.W. de Roever. *Proceedings Seminar 1982–1983. Mathematical structures in field theories*. 1985.
- 7 Vacantiecursus 1985: *Variatierekening*. 1985.
- 8 G.M. Tuynman. *Proceedings Seminar 1983–1985. Mathematical structures in field theories, Vol.1 Geometric quantization*. 1985.
- 9 J. van Leeuwen, J.K. Lenstra (eds.). *Parallel computers and computations*. 1985.
- 10 Vakantiecursus 1986: *Matrices*. 1986.
- 11 P.W.H. Lemmens. *Discrete wiskunde: tellen, grafen, spelen en codes*. 1986.
- 12 J. van de Lune. *An introduction to Tauberian theory: from Tauber to Wiener*. 1986.
- 13 G.M. Tuynman, M.J. Bergvelt, A.P.E. ten Kroode. *Proceedings Seminar 1983–1985. Mathematical structures in field theories, Vol.2*. 1987.
- 14 Vakantiecursus 1987: *De personal computer en de wiskunde op school*. 1987.
- 15 Vakantiecursus 1983: *Complexe getallen*. 1987.
- 16 P.J.M. Bongaarts, E.A. de Kerf, P.H.M. Kersten. *Proceedings Seminar 1984–1986. Mathematical structures in field theories, Vol.1*. 1988.
- 17 F. den Hollander, H. Maassen (eds.). *Mark Kac seminar on probability and physics. Syllabus 1985–1987*. 1988.
- 18 Vakantiecursus 1988. *Differentierekening*. 1988.
- 19 R. de Bruin, C.G. van der Laan, J. Luyten, H.F. Vogt. *Publiceren met LATEX*. 1988.
- 20 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 1*. 1988.
- 21 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 2*. 1988.
- 22 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 3*. 1988.
- 23 J. van Mill, G.Y. Nieuwland (eds.). *Proceedings van het symposium wiskunde en de computer*. 1989.
- 24 P.W.H. Lemmens (red.). *Bewijzen in de wiskunde*. 1989.
- 25 Vakantiecursus 1989: *Wiskunde in de Gouden Eeuw*. 1989.
- 26 G.G.A. Bäuerle et al. *Proceedings Seminar 1986–1987. Mathematical structures in field theories*. 1990.
- 27 Vakantiecursus 1990: *Getallentheorie en haar toepassingen*. 1990.
- 28 Vakantiecursus 1991: *Meetkundige structuren*. 1991.
- 29 A.G. van Asch, F. van der Blij. *Hoeken en hun Maat*. 1992.
- 30 M.J. Bergvelt, A.P.E. ten Kroode. *Proceedings seminar 1986–1987. Lectures on Kac-Moody algebras*. 1992.
- 31 Vakantiecursus 1992: *Systeemtheorie*. 1992.
- 32 F. den Hollander, H. Maassen (eds.). *Mark Kac seminar on probability and physics. Syllabus 1987–1992*. 1992.
- 33 P.W.H. Lemmens (ed.). *Meetkunde van kunst tot kunde, vroeger en nu*. 1993.
- 34 J.H. Kruizinga. *Toegepaste wiskunde op een PC*. 1992.
- 35 Vakantiecursus 1993: *Het reële getal*. 1993.
- 36 Vakantiecursus 1994: *Computeralgebra*. 1994.
- 37 G. Alberts. *Wiskunde en praktijk in historisch perspectief. Syllabus*. 1994.
- 38 G. Alberts, J. Schut (eds.). *Wiskunde en praktijk in historisch perspectief. Reader*. 1994.
- 39 E.A. de Kerf, H.G.J. Pijls (eds.). *Proceedings Seminar 1989–1990. Mathematical structures in field theory*. 1996.
- 40 Vakantiecursus 1995: *Kegelsneden en kwadratische vormen*. 1995.
- 41 Vakantiecursus 1996: *Chaos*. 1996.
- 42 H.C. Doets. *Wijzer in Wiskunde*. 1996.
- 43 Vakantiecursus 1997: *Rekenen op het Toeval*. 1997.
- 44 Vakantiecursus 1998: *Meetkunde, Oud en Nieuw*. 1998.
- 45 Vakantiecursus 1999: *Onbewezen Vermoedens*. 1999.
- 46 P.W. Hemker, B.W. van de Fliert (eds.). *Proceedings of the 33rd European Study Group with Industry*. 1999.
- 47 K.O. Dzhaparidze. *Introduction to Option Pricing in a Securities Market*. 2000.
- 48 Vakantiecursus 2000: *Is wiskunde nog wel mensenwerk?* 2000.
- 49 Vakantiecursus 2001: *Experimentele wiskunde*. 2001.
- 50 Vakantiecursus 2002: *Wiskunde en gezondheid*. 2002.
- 51 G.M. Hek (ed.). *Proceedings of the 42nd European Study Group with Industry*. 2002.
- 52 Vakantiecursus 2003: *Wiskunde in het dagelijks leven*. 2003.
- 53 Vakantiecursus 2004: *Structuur in schoonheid*. 2004.
- 54 Vakantiecursus 2005: *De schijf van vijf – meetkunde, algebra, analyse, discrete wiskunde, stochastiek*. 2005.
- 55 J. Hulshof (ed.). *Proceedings of the 52nd European Study Group with Industry*. 2006.
- 56 Vakantiecursus 2006: *Actuele wiskunde*. 2006.
- 57 Vakantiecursus 2007: *Wiskunde in Beweging*. 2007.

MC SYLLABI

- 1.1 F. Göbel, J. van de Lune. Leergang besiskunde, deel 1: wiskundige basiskennis. 1965.
- 1.2 J. Hemelrijk, J. Kriens. Leergang besiskunde, deel 2: kansberekening. 1965.
- 1.3 J. Hemelrijk, J. Kriens. Leergang besiskunde, deel 3: statistiek. 1966.
- 1.4 G. de Leve, W. Molenaar. Leergang besiskunde, deel 4: Markovketens en wachttijden. 1966
- 1.5 J. Kriens, G. de Leve. Leergang besiskunde, deel 5: inleiding tot de mathematische besiskunde. 1966.
- 1.6a B. Dorhout, J. Kriens. Leergang besiskunde, deel 6a: wiskundige programmering. 1967.
- 1.6b B. Dorhout, J. Kriens, J.Th. van Lieshout. Leergang besiskunde deel 6b: wiskundige programmering. 1967
- 1.7a G. de Leve. Leergang besiskunde, deel 7a: dynamische programmering 1. 1969
- 1.7b G. de Leve, H.C. Tijms. Leergang besiskunde, deel 7b: dynamische programmering 2. 1970.
- 1.7c G. de Leve, H.C. Tijms. Leergang besiskunde deel 7c: dynamische programmering 3. 1971.
- 1.8 J. Kriens, F. Göbel, W. Molenaar. Leergang besiskunde, deel 8: minimaxmethode, netwerkplanning, simulatie. 1968.
- 2.1 G.J.R. Förch, P.J. van der Houwen, R.P. van de Riet. Colloquium stabiliteit van differentieschema's deel 1. 1967.
- 2.2 L. Dekker, T.J. Dekker, P.J. van der Houwen, M.N. Spijker. Colloquium stabiliteit van differentieschema's deel 2. 1968.
- 3.1 H.A. Lauwerier. Randwaardproblemen, deel 1. 1967.
- 3.2 H.A. Lauwerier. Randwaardproblemen, deel 2. 1968.
- 3.3 H.A. Lauwerier. Randwaardproblemen, deel 3. 1968.
- 4 H.A. Lauwerier. Representaties van groepen. 1968.
- 5 J.H. van Lint, J.J. Seidel, P.C. Baayen. Colloquium discrete wiskunde. 1968.
- 6 K.K. Koksa. Cursus ALGOL 60. 1969.
- 7.1 Colloquium moderne rekenmachines, deel 1. 1969.
- 7.2 Colloquium moderne rekenmachines, deel 2. 1969.
- 8 H. Bavinck, J. Grasman. Relaxatietrillingen. 1969.
- 9.1 T.M.T. Coolen, G.J.R. Förch, E.M. de Jager, H.G.J. Pijs. Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 1. 1970.
- 9.2 W.P. van den Brink, T.M.T. Coolen, B. Dijkhuis, P.P.N. de Groen, P.J. van der Houwen, E.M. de Jager, N.M. Temme, R.J. de Vogelaere. Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 2. 1970.
- 10.1 J. Fabius, W.R. van Zwet. Grondbegrippen van de waarschijnlijkheidsrekening. 1970.
- 11 H. Bart, M.A. Kaashoek, H.G.J. Pijs, W.J. de Schipper, J. de Vries. Colloquium halfalgebra's en positieve operatoren. 1971.
- 12 T.J. Dekker. Numerieke algebra. 1971.
- 13 F.E.J. Kruseman Aretz. Programmeren voor rekenautomaten; de MC ALGOL 60 vertaler voor de EL X8. 1971.
- 14 H. Bavinck, W. Gautschi, G.M. Willems. Colloquium approximatietheorie. 1971.
- 15.1 T.J. Dekker, P. W. Hemker, P.J. van der Houwen. Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 1. 1972.
- 15.2 P.A. Beentjes, K. Dekker, H.C. Hemker, S.P.N. van Kampen, G.M. Willems. Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 2. 1973.
- 15.3 P.A. Beentjes, K. Dekker, P.W. Hemker, M. van Veldhuizen. Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 3. 1975.
- 16.1 L. Geurts. Cursus programmeren, deel 1: de elementen van het programmeren. 1973.
- 16.2 L. Geurts. Cursus programmeren, deel 2: de programmeertaal ALGOL 60. 1973.
- 17.1 P.S. Stobbe. Lineaire algebra, deel 1. 1973.
- 17.2 P.S. Stobbe. Lineaire algebra, deel 2. 1973.
- 17.3 N.M. Temme. Lineaire algebra, deel 3. 1976.
- 18 F. van der Blij, H. Freudenthal, J.J. de Jongh, J.J. Seidel, A. van Wijngaarden. Een kwart eeuw wiskunde 1946-1971, syllabus van de vakantiecursus 1971. 1973.
- 19 A. Hordijk, R. Potharst, J.Th. Runnenburg. Optimaal stoppen van Markovketens. 1973.
- 20 T.M.T. Coolen, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen, E. Slagt. ALGOL 60 procedures voor begin- en randwaardproblemen. 1976.
- 21 J.W. de Bakker (red.). Colloquium programma-correctheid. 1975.
- 22 R. Helmers, J. Oosterhoff, F.H. Ruymgaart, M.C.A. van Zuylen. Asymptotische methoden in de toe-zingsstheorie; toepassingen van naburigheid. 1976.
- 23.1 J.W. de Roever (red.). Colloquium onderwerpen uit de biomathematica, deel 1. 1976.
- 23.2 J.W. de Roever (red.). Colloquium onderwerpen uit de biomathematica, deel 2. 1977.
- 24.1 P.J. van der Houwen. Numerieke integratie van differentiaalvergelijkingen. deel 1: eenstapsmethoden. 1974.
- 25 Colloquium structuur van programmeertalen. 1976.
- 26.1 N.M. Temme (ed.). Nonlinear analysis, volume 1. 1976.
- 26.2 N.M. Temme (ed.). Nonlinear analysis, volume 2. 1976.
27. M. Bakker, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen, S.J. Polak, M. van Veldhuizen. Colloquium discretiseringsmethoden. 1976.
- 28 O. Diekmann, N.M. Temme (eds.). Nonlinear diffusion problems. 1976.
- 29.1 J.C.P. Bus (red.). Colloquium numerieke programmatuur, deel 1A, deel 1 B. 1976.
- 29.2 H.J.J. te Riele (red.). Colloquium numerieke programmatuur, deel 2. 1977.
- 30 J. Heering, P. Klint (red.). Colloquium programmeeromgevingen. 1983.
- 31 J.H. van Lint (red.). Inleiding in de coderingstheorie. 1976.
- 32 L. Geurts (red.). Colloquium bedrijfssystemen. 1976.
- 33 P.J. van der Houwen. Berekening van waerstanden in zeeën en rivieren. 1977.
- 34 J. Hemelrijk. Oriënterende cursus mathematische statistiek. 1977.
- 35 P.J.W. ten Hagen (red.). Colloquium, computer graphics. 1978.
- 36 J.M. Aarts, J. de Vries. Colloquium topologische dynamische systemen. 1977.
- 37 J.C. van Vliet (red.). Colloquium capita datastructuren. 1978.
- 38.1 T.H. Koomwinder (ed.). Representations of locally compact groups with applications, part I. 1979.
- 38.2 T.H. Koomwinder (ed.). Representations of locally compact groups with applications, part II. 1979.
- 39 O.J. Vrieze, G.L. Wanrooy. Colloquium stochastische spelen. 1978.
- 40 J. van Tiel. Convexe analyse. 1979.
- 41 H.J.J. te Riele (ed.) Colloquium numerical treatment of integral equations. 1979.
- 42 J.C. van Vliet (red.). Colloquium capita implementatie van programmeertalen. 1980.
- 43 A.M. Cohen, H.A. Wilbrink. Eindige groepen (een inleidende cursus). 1980.
- 44 J.G. Verwer (ed.). Colloquium numerical solution of partial differential equations. 1980.
- 45 P. Klint (red.). Colloquium; hogere programmeertalen en computerarchitectuur. 1980.
- 46.1 P.M.G. Apers (red.). Colloquium databankorganisatie, deel 1. 1981.
- 46.2 P.G.M. Apers (red.). Colloquium databankorganisatie, deel 2. 1981.
- 47.1 P. W. Hemker (ed.). NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60: general information and indices. 1981.
- 47.2 P.W. Hemker (ed.). NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 1: elementary procedures; vol. 2: algebraic evaluations. 1981.
- 47.3 P.W. Hemker (ed.). NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 3A: linear algebra part I. 1981.
- 47.4 P.W. Hemker (ed.). NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 3B: linear algebra, part II. 1981.
- 47.5 P.W. Hemker (ed.). NUMAL, procedures in ALGOL 60, vol. 4: analytical evaluations; vol. 5A: analytical problems, part I. 1981
- 47.6 P.W. Hemker (ed.). NUMAL, procedures in ALGOL 60, vol. 5B: analytical problems, part II. 1981
- 47.7 P.W. Hemker (ed.). NUMAL, procedures in ALGOL 60, vol. 6: special functions and constants; vol. 7: interpolation and approximation. 1981
- 48.1 P.M.B. Vitányi, J. van Leeuwen, P. van Emde Boas (red.). Colloquium complexiteit en algoritmen, deel 1. 1982.
- 48.2 P.M.B. Vitányi, J. van Leeuwen, P. van Emde Boas (red.). Colloquium complexiteit en algoritmen, deel 2. 1982.
- 49 T.H. Koomwinder (ed.) The structure of real semisimple Lie groups. 1982
- 50 H. Nijmeijer. Inleiding systeemtheorie. 1982.
- 51 P.J. Hoogendoorn (red.). Cursus cryptografie. 1983.